



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky

Studijní modul

MECHANIKA

Renata Holubová



Olomouc 2012

Zpracováno v rámci řešení projektu Evropského sociálního fondu
a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky
Modularizace a modernizace studijního programu počáteční přípravy učitele fyziky
Registrační číslo: CZ.1.07/2.2.00/18.0018

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

První vydání

© Renata Holubová, 2012

ISBN 978-80-244-3298-4

Abstrakt

Předkládaný studijní text zahrnuje základní poznatky z mechaniky hmotného bodu a tuhého tělesa, hydromechaniky – jednak hydrostatiky, jednak hydrodynamiky.

Cílová skupina

Text je určen pro studenty oboru Fyzika v bakalářské etapě studia.

OBSAH

ÚVOD	7
MECHANIKA HMOTNÉHO BODU	11
IMPULS SÍLY, HYBNOST, PRÁCE A ENERGIE	36
TUHÉ TĚLESO	46
MOMENT SETRVAČNOSTI	53
PRUŽNOST A PEVNOST	59
GRAVITAČNÍ POLE	65
HYDROMECHANIKA	74

ÚVOD

Fyzika jako věda o přírodě zkoumá zákonitosti vzájemného působení hmotných objektů a formy jejich pohybu. Její název je odvozen z řeckého slova „fysis“ – příroda, neboť původně byla vědou o přírodě. Teprve později se od ní oddělily další přírodní vědy – chemie, biologie, astronomie, geologie, meteorologie atd. Základní metody zkoumání ve fyzice jsou pozorování a experiment.

Z hlediska metody zkoumání rozlišujeme fyziku

teoretickou (snaží se fyzikální poznatky logicky uspořádat, matematicky odvozuje známé i nové poznatky),

experimentální (prakticky ověřuje představy teoretické fyziky, na základě pokusů dochází k obecným empirickým zákonům a vztahům),

praktickou (výsledky experimentální fyziky ověřuje v praktickém životě).

Z hlediska historického a podle druhu jevů, které fyzika zkoumá, ji dělíme na mechaniku, molekulovou fyziku a termodynamiku, akustiku, elektřinu, magnetismus, optiku, atomovou a jadernou fyziku, astrofyziku.

1.1 Rozdělení fyzikálních veličin

Skalár – je dán jednoznačně číselným údajem (teplota, hustota, náboj). V matematice, kde abstrahujeme od měřicích jednotek a od názvů veličin, představuje skalár reálné číslo. Jedná se o nejjednodušší fyzikální veličinu, která je i v n -rozměrném prostoru dána jediným údajem – velikostí (odvozeno od *scala* - stupnice).

Vektor – je zadán směrem a velikostí. Značka vektoru: $\vec{a}$ nebo $\mathbf{a}$, např. vektor rychlosti $\vec{v}$ nebo $\mathbf{v}$, vektor síly $\vec{F}$ nebo $\mathbf{F}$.

Vektor – vázaný (pevný) – vázaný na bod prostoru (definován jako orientovaná úsečka nebo uspořádaná dvojice bodů

klouzavý – vázaný na přímku

volný – vázaný na množinu rovnoběžných přímek

Vektor vázaný – např. intenzita $\vec{E}$ stacionárního elektrického pole, rychlost $\vec{v}$ bodu rotujícího tělesa, vektor klouzavý např. síla $\vec{F}$ působící na absolutně tuhé těleso, vektor volný – moment $\vec{D}$ silové dvojice, která působí na dokonale tuhé těleso.

Aritmetický vektor – uspořádaná množina čísel; uspořádaná množina dvojic bodů, která se z hlediska dimenze zobrazuje do libovolného geometrického prostoru (přímka, rovina, 3-rozměrný prostor), je to řádková matice.

Po připojení charakteristiky velikosti lze vytvořit tzv. geometrický vektor pomocí pojmu orientované úsečky. U vektoru rozlišujeme tedy velikost, směr a orientaci (příklady vektorových veličin – rychlost, zrychlení, intenzita...).

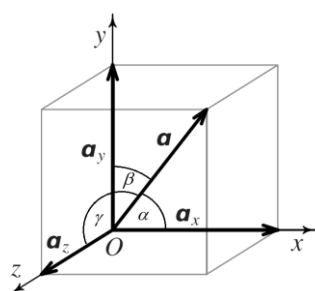
Tenzor – složitá veličina, k jejímuž určení je třeba více určovacích prvků než je dimenze prostoru. Tenzory rozlišujeme podle tzv. řádu. Nejjednodušší je tenzor druhého řádu, který má ve fyzice praktický význam a který má v n -rozměrném prostoru n^2 složek.

V trojrozměrném euklidovském prostoru má tenzor druhého řádu $n^2 = 9$ složek a zapisuje se formou matice.

V trojrozměrném prostoru dále platí, že tenzor nultého řádu $3^0 = 1$ má jednu složku (= skalár), tenzor prvního řádu $3^1 = 3$ má tři složky (= vektor). Obecně tedy platí, že tenzor k -tého řádu má n^k složek, kde n je dimenze prostoru a k je řád tenzoru.

Vektory

$$\vec{a} = (\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z)$$



Platí

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z,$$

kde $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ jsou složky vektoru $\vec{a}$.

Velikost vektoru $\vec{a}$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

kde $a_x = (x_2 - x_1)$, $a_y = (y_2 - y_1)$, $a_z = (z_2 - z_1)$ jsou souřadnice vektoru. V soustavě souřadnic ($Oxyz$) jsou souřadnice x_1, y_1, z_1 souřadnice počátečního bodu vektoru a souřadnice x_2, y_2, z_2 jsou souřadnice koncového bodu vektoru. Pokud je počátečním bodem vektoru bod O soustavy souřadnic, je $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ a platí $a_x = x_2$, $a_y = y_2$, $a_z = z_2$.

Velikost vektoru je vždy nezáporná, souřadnice vektoru mohou mít hodnotu kladnou i zápornou.

Určení vektoru ve složkovém tvaru:

$$\vec{a}_x = a_x \vec{i}, \vec{a}_y = a_y \vec{j}, \vec{a}_z = a_z \vec{k},$$

$$\vec{a} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z.$$

$\vec{i} = \frac{\vec{a}_x}{a_x}$, $\vec{j} = \frac{\vec{a}_y}{a_y}$, $\vec{k} = \frac{\vec{a}_z}{a_z}$ jsou jednotkové vektory ve směru os x, y, z .

Vektor můžeme určit také pomocí směrových úhlů α, β, γ a velikosti složek vektoru:

$$\cos \alpha = a_x/a \Rightarrow a_x = a \cos \alpha$$

$$a_y = a \cos \beta$$

$$a_z = a \cos \gamma$$

Po umocnění a sečtení máme $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Vlastnosti skalárního součinu

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$

Vektor zapsaný pomocí jednotkových vektorů (vektorů baze)

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z,$$

$$\vec{b} = \vec{i}b_x + \vec{j}b_y + \vec{k}b_z,$$

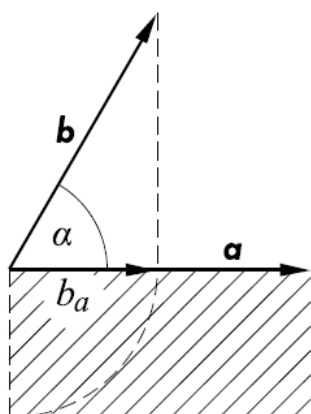
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

neboť

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \dots = 0.$$

Podmínka kolmosti dvou vektorů: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Geometrický význam skalárního součinu:



Velikost skalárního součinu je velikost plochy obdélníku vytvořeného ze strany o velikosti vektoru $\vec{a}$ a strany o velikosti průmětu vektoru $\vec{b}$ do směru vektoru $\vec{a}$.

Jinak: Skalární součin je roven plošnému obsahu obdélníka, jehož jednou stranou je velikost jednoho vektoru a druhou stranou je průmět druhého vektoru do směru vektoru prvního.

Aplikace ve fyzice: mechanická práce $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha$

Vyjádření směrových kosinů pomocí složek vektoru:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Vektorový součin

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = ab \sin \varphi$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \dots$$

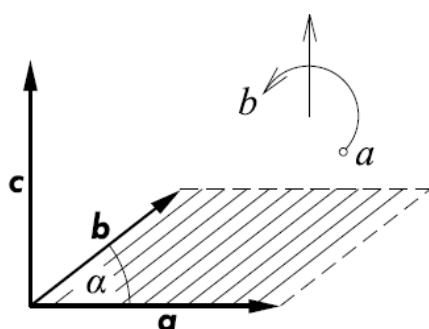
$$\vec{c} = \vec{i}(a_y b_z - b_y a_z) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Výsledkem vektorového součinu je vektor, záleží na pořadí vektorů v součinu.

Zápis vektorového součinu a jeho vyčíslení lze provést pomocí determinantu (viz cvičení).

Geometrický význam vektorového součinu:



Velikost vektorového součinu je číselně rovna obsahu rovnoběžníka sestrojeného z obou vektorů. Směr je kolmý k rovině, ve které vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ leží. Orientace je určena pravidlem pravé ruky.

Shrnutí

Znalost práce s vektory je nezbytná pro pochopení fyzikálních vztahů a zákonů a pro práci s fyzikálními veličinami. Při řešení konkrétních úloh je vhodné využívat také grafického znázorňování vektorů, které je velmi názorné. S vektory je možné pracovat jak v dvojrozměrné soustavě souřadnic, tak v soustavě kartézské trojrozměrné. Je nezbytné si uvědomit, zda fyzikální veličina je skalár, vektor či tenzor.

Příklady k procvičení

1. Vektor $\vec{a}$ o velikosti $a = 5$ svírá s vektorem $\vec{b}$ o velikosti $b = 3$ úhel $\varphi = 60^\circ$. Určete velikost vektoru $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
2. Vektor $\vec{a}$ délky 10 cm svírá úhel $\varphi = 30^\circ$ s vektorem $\vec{b}$ délky 6 cm. Určete velikost $\vec{a} - \vec{b}$.
3. Tři navzájem na sebe kolmé vektory o společném počátku mají velikosti $2a$, $2a$, a . Stanovte velikost vektoru $\vec{b}$, který je součtem těchto tří vektorů.
4. Určete velikost vektoru $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ a vypočítejte jeho směrové kosiny.
5. Pomocí skalárního součinu určete, jaký úhel spolu svírají vektory

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

6. Stanovte skalární a vektorový součin vektorů

$$\vec{a} = (2, -3, 0), \quad \vec{b} = (1, 0, 4)$$

$$\vec{a} = (3, 1, 5), \quad \vec{b} = (2, 4, -2)$$

7. Určete vektorový součin dvou vektorů, jejichž velikost je 7 a 4 a svírají spolu úhel 30°
8. Dokažte $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{z}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{z}) - \vec{z} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Studijní text

Jarešová, M., Volf, I.: Skaláry, vektory, Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku. Str. 1-12. Dostupné on-line <<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/vektory.pdf>>

1 MECHANIKA HMOTNÉHO BODU

Mechanika je část fyziky, která studuje zákony mechanického pohybu těles a jejich vzájemného působení. Rozdělujeme ji na kinematiku a dynamiku. Kinematika se zabývá studiem pohybu vzhledem k času. Dynamika studuje souvislost pohybu vzhledem k silám, které ho vyvolaly.

1.1 Kinematika hmotného bodu

Přímočarý pohyb

Tělesa jsou složité útvary. To, co o nich zjišťujeme běžnými prostředky, dává o nich jen hrubý obraz. Budeme předpokládat, že se tělesa nedeformují a že se mohou začít pohybovat najednou, jako celek. Tzn., že vzájemné vzdálenosti jejich částí jsou stálé. Taková tělesa nazýváme tělesa tuhá. Proto, abychom mohli vyšetřovat pohyb tělesa, je nutné vhodně zvolit vztažnou soustavu. Vztažnou soustavou může být tuhé těleso nebo alespoň tři body, které neleží na jedné přímce a jejichž vzájemná vzdálenost se nemění. Vztažnou soustavou je tedy vztažné těleso (může to být např. Země) se zavedou soustavou souřadnic a časem.

Pro začátek je výhodné studovat pohyb malých částic, které lze považovat za bodové. Těleso nahradíme hmotným bodem (jiné možné označení je částice, resp. bodový objekt).

Hmotný bod je těleso o hmotnosti m , jehož tvar, rozměry a vnitřní struktura nejsou při uvažovaném ději podstatné a které můžeme považovat za bodové.

Hrozený kámen lze považovat za hmotný bod. Míč, který se kutálí se svahu, nelze považovat za hmotný bod.

Trajektorie hmotného bodu v určité vztažné soustavě je souhrn bodů, jimiž hmotný bod prochází.

Tvar trajektorie při určitém pohybu závisí na volbě vztažné soustavy.

Trajektorie bodu na obvodu kola jedoucího automobilu ve vztažné soustavě dané podvozkem je kružnice. Volíme-li soustavu pevně spojenou s kolem, je to bod.

To, že trajektorie těles mají v různých vztažných soustavách různý tvar a také ostatní veličiny, charakterizující pohyb jsou v různých soustavách různé, vyjádříme tím, že pohyb a klid jsou relativní. relativnost pohybu.

Dráha je délka trajektorie, kterou urazí těleso (hmotný bod) během určitého času. Označujeme ji písmenem s , jednotkou je metr (m). Podle tvaru dráhy hmotného bodu rozlišujeme pohyby přímočaré a křivočaré.

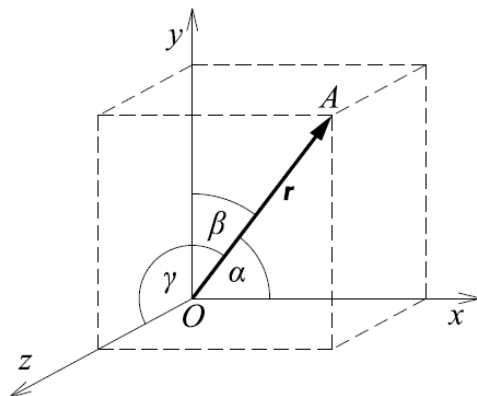
Polohu hmotného bodu určujeme vzhledem ke vztažné soustavě souřadnic. V jedno-rozměrném případě určujeme polohu bodu vzhledem k počátku. Směr rostoucí souřadnice je směr kladný. Polohu zadáváme ve zvolených délkových jednotkách. Změna polohy hmotného bodu z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 je posunutí

$$\Delta x = x_2 - x_1. \quad (2.1)$$

Velikost posunutí $|\Delta x|$ je vždy nezáporná (kladná nebo nula). Posunutí je vektorová veličina.

Dvojměrná pravoúhlá soustava souřadnic se používá pro určení polohy hmotného bodu v rovině (Oxy).

Trojměrná pravoúhlá soustava souřadnic – určujeme polohu hmotného bodu v prostoru ($Oxyz$).



Obr. 1 Pravoúhlá soustava souřadnic

Polohu hmotného bodu lze udat i na trajektorii. Volíme orientaci křivky a počátek. Poloha hmotného bodu je potom dána dráhovou souřadnicí s , kde $|s|$ je délka oblouku spojujícího počátek s daným bodem. Polohu hmotného bodu je výhodné zadat pomocí polohového vektoru $\vec{r}$.

Polohový vektor $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$.

Informaci o poloze hmotného bodu získáme, když zakreslíme do grafu závislost je polohy $x(t)$ na čase t .

Rychlost hmotného bodu

Pojem rychlost používaný v praktickém životě představuje skalární veličinu a odpovídá její definici podle vztahu $v = s/t$. Ve fyzice zavádíme rychlost jako veličinu vektorovou. Vycházíme přitom z představy, že když se hmotný bod pohybuje po nějaké trajektorii, jeho rychlost v daném bodě je vektorová veličina, jejíž směr je směr tečny k dané trajektorii. Velikost této veličiny odpovídá hodnotě skalární veličiny v . Odtud plyne, že hmotný bod se může pohybovat stálou rychlostí o velikosti v , ale směr vektoru rychlosti $\vec{v}$ se může měnit.

Rozdělení pohybů hmotného bodu podle rychlosti:

- rovnoměrné
- nerovnoměrné

Pohyb přímočarý dělíme na

- rovnoměrný
- nerovnoměrný – rovnoměrně zrychlený
- nerovnoměrný – nerovnoměrně zrychlený

Rovnoměrný přímočarý pohyb

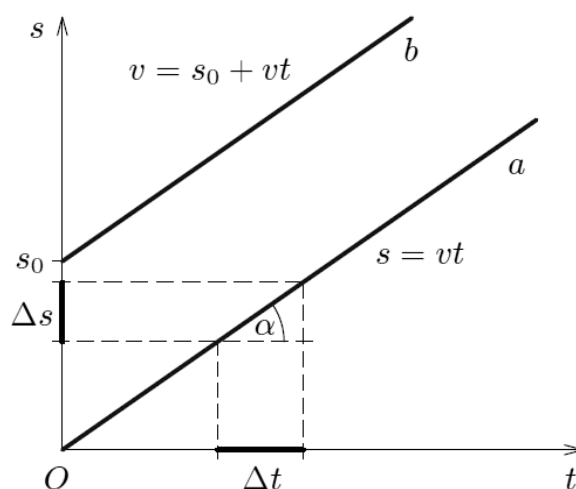
Hmotný bod urazí ve stejných časových úsecích stejnou délku dráhy.

Přírůstek dráhy v čase $\Delta t = t_2 - t_1$ je $\Delta x = x_2 - x_1$. Definujeme průměrnou neboli střední rychlost $\bar{v}_x$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.2)$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha \quad (2.3)$$

směrnice přímky v případě, že na obou osách volíme stejně dlouhé jednotky.



Obr. 2 Pohyb rovnoměrný přímočarý

Pozn. Je-li zadáno, že v čase $t_0 = 0$ je dráha x_0 a v čase t je uražená dráha x , potom

$$\bar{v}_x = \frac{x - x_0}{t - t_0}. \quad (2.4)$$

Měříme-li čas od okamžiku, kdy hmotný bod již urazil dráhu x_0 , potom

$$x = \bar{v}_x t + x_0. \quad (2.5)$$

Průměrná velikost rychlosti $\bar{v}$ je určena celkovou dráhou, kterou hmotný bod urazí. Nezávisí na směru pohybu. Průměrná rychlost je skalár.

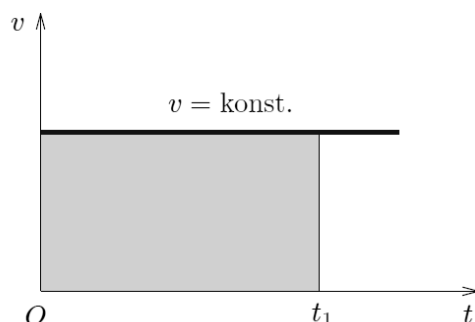
$$\bar{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celková doba pohybu}}$$

Okamžitá rychlost (rychlost) je vektorová veličina, která udává, jak rychle se v daném okamžiku mění poloha částice s časem:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.6)$$

Okamžitá rychlost je z matematického hlediska rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$. Velikost rychlosti (velikost okamžité rychlosti) je skalár.

Pozn. Tachometr v automobilu je konstruován tak, že udává okamžitou velikost rychlosti.



Obr. 3 Pohyb rovnoměrný – graf závislosti rychlosti na čase

Zrychlení

Zrychlení $\vec{a}$ charakterizuje časovou změnu vektoru rychlosti $\vec{v}$. U rychlosti se může měnit její velikost, směr nebo obojí.

Průměrné zrychlení $\bar{a}_x$ v časovém intervalu Δt je dáno vztahem

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \quad (2.7)$$

Okamžité zrychlení definujeme pomocí

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \quad (2.8)$$

Jednotkou zrychlení je $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pozn. Zrychlení v daném okamžiku je rovno směrnici tečny ke grafu $v_x(t)$ v bodě určeném tímto okamžikem. Platí

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (2.9)$$

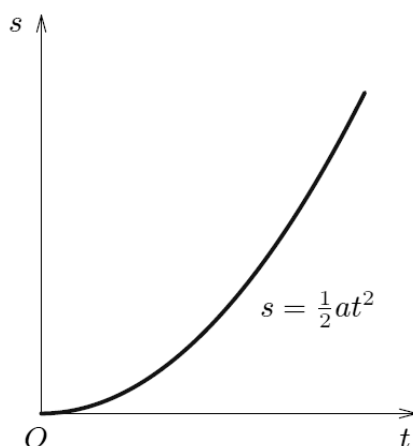
Zapamatujte si! Mají-li vektor zrychlení hmotného bodu a vektor okamžité rychlosti stejné znaménko, pak roste velikost rychlosti hmotného bodu a pohyb se zrychluje. V opačném případě velikost rychlosti klesá a pohyb je zpomalený.

Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Jedná se o zvláštní případ zrychleného pohybu, kdy zrychlení je konstantní (nemění se jeho směr ani velikost) (viz obr. 5). Velikost okamžité rychlosti je přímo úměrná času a je určena vztahem $v = a t$ (předpokládáme, že počáteční rychlost a dráha je v čase $t = 0$ nulová). Závislost dráhy na čase je dána vztahem $s = \frac{1}{2} a t^2$ (viz obr. 4).

Platí, že $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, odtud $dv_x = a_x dt$. Tuto rovnici lze integrovat a dostaneme:

$$\int dv_x = \int a_x dt$$



Obr. 4 Graf závislosti dráhy na čase u rovnoměrně zrychleného pohybu

Vzhledem k tomu, že zrychlení je konstantní, lze je vytknout před integrál a rovnici jednoduše upravit:

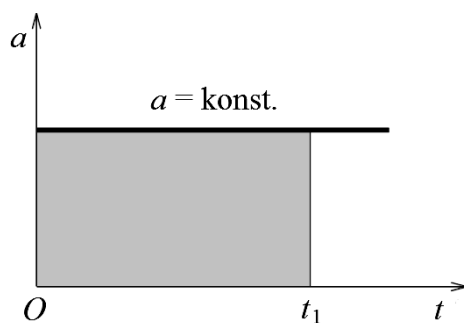
$$v_x = a_x t + C$$

Symbol C označuje integrační konstantu, která se určuje z počátečních podmínek. Je-li na počátku v čase $t = 0$ rychlost hmotného bodu $v_x = v_{x0}$, dostaneme po dosazení

$$v_{x0} = a_x \cdot 0 + C, \text{ a tedy } v_{x0} = C.$$

Řešení rovnice je

$$v_x = a_x t + v_{x0}. \quad (2.9)$$



Obr. 5 Graf závislosti zrychlení na čase u rovnoměrně zrychleného pohybu

Dále hledáme vztah pro vyjádření dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu. Postupujeme analogicky. Víme, že

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

odtud

$$dx = v_x dt$$

a dále, když využijeme předchozího výsledku,

$$dx = (a_x t + v_{x0}) dt.$$

Rovnici opět integrujeme

$$\int dx = \int (a_x t + v_{x0}) dt$$

a máme

$$x = a_x \frac{t^2}{2} + v_{x0} t + C_2.$$

Integrační konstantu C_2 určíme z počátečních podmínek. Na počátku pohybu v čase $t = 0$ je poloha hmotného bodu dána souřadnicí x_0 , po dosazení dostaneme pro C_2 hodnotu x_0 . Výsledné řešení – vztah pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu hmotného bodu – zapíšeme ve tvaru

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (2.10)$$

Jiná možnost odvození bez použití integrálního počtu. Rovnici 2.7. lze přepsat na tvar

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0},$$

kde v_{0x} označuje rychlost hmotného bodu v časovém okamžiku $t = 0$. Vztah upravíme

$$v = v_{0x} + a_x t. \quad (2.11)$$

Stejnou úpravu lze provést pro rovnici pro výpočet střední rychlosti. Píšeme

$$\bar{v}_x = \frac{x - x_0}{t - 0},$$
$$x = x_0 + \bar{v}_x t, \quad (2.12)$$

kde x_0 je poloha hmotného bodu v čase $t = 0$, $\bar{v}_x$ je průměrná rychlost hmotného bodu v daném časovém intervalu.

Průměrnou rychlost můžeme zapsat jako

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2} (v_{0x} + v_x) = v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t. \quad (2.13)$$

Po dosazení rovnice (2.10), (2.12) do (2.11) máme

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (2.14)$$

Toto je výsledek shodný se vztahem jako v předcházejícím případě.

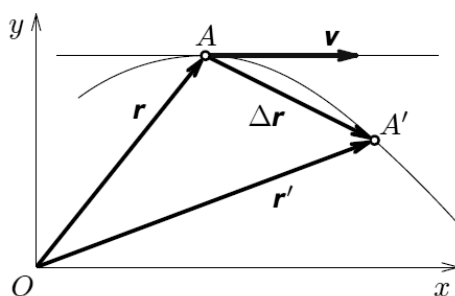
Pohyb hmotného bodu v rovině a prostoru

V kartézské soustavě souřadnic lze polohu hmotného bodu určit pomocí polohového vektoru. Polohový vektor spojuje počátek soustavy souřadnic (nebo předem zvolený vztažný bod) s hmotným bodem, jehož polohu určujeme.

Zápis polohového vektoru

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z, \quad (2.15)$$

kde x, y, z jsou kartézské souřadnice hmotného bodu, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory.



Obr. 6 Změna polohového vektoru

Při pohybu hmotného bodu se s časem mění jednotlivé souřadnice hmotného bodu, proto složky polohového vektoru v jednotlivých souřadnicových osách jsou funkcí času $x(t), y(t), z(t)$. Posunutí hmotného bodu určené změnou polohového vektoru $\Delta \vec{r}$ určíme jako rozdíl polohových vektorů v časových okamžicích t_1 a t_2 , kde $t_2 = t_1 + \Delta t$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}),$$

po úpravě

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}. \quad (2.16)$$

Průměrná rychlost hmotného bodu v časovém intervalu Δt určená pomocí polohového vektoru je dána

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.17)$$

Okamžitou rychlost $\vec{v}$ určíme jako

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.18)$$

Po dosazení za polohový vektor máme:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \quad (2.19)$$

Porovnáním dostáváme

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (2.20)$$

Analogicky zapíšeme vztahy pro zrychlení hmotného bodu.

Průměrné zrychlení – rychlost hmotného bodu se mění z $\vec{v}_1$ v čase t_1 na $\vec{v}_2$ v čase $t_1 + \Delta t$

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.21)$$

Okamžité zrychlení dostaneme při přechodu $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.22)$$

Postupným dosazením dostáváme:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \quad (2.21)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Jednotka zrychlení je $m \cdot s^{-2}$.

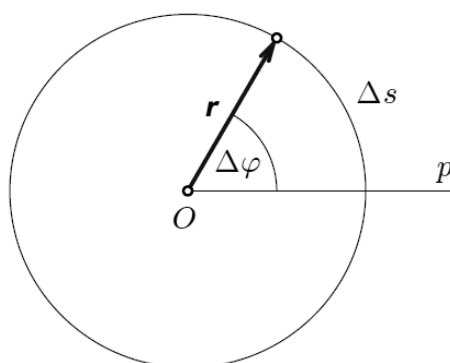
Rovnoměrný pohyb hmotného bodu po kružnici

Nejběžnější a také nejjednodušší případ křivočarého pohybu. Pro jeho charakteristiku využijeme popis polohy hmotného bodu pomocí průvodiče, který má velikost rovnu poloměru kružnice r . Uvažujme dále, že během doby t přejde hmotný bod z bodu A do bodu B, tzn. že průvodič během tohoto času opíše úhel φ (tzv. úhlová dráha, jednotka rad – radián). Platí $2\pi \text{ rad} \approx 360^\circ$ (převod oblouková míra – stupně).

Lze psát $s = r\varphi$, $ds = r d\varphi$. Vztahy z kinematiky přímočarého pohybu vyjádříme pomocí úhlové dráhy. Platí

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega,$$

kde ω je úhlová rychlost pohybu. Jednotka úhlové rychlosti je radián za sekundu, její jednotka je $[\omega] = s^{-1}$ (radián je bezrozměrová jednotka).



Obr. 7 Pohyb po kružnici

Je-li úhlová rychlost konstantní ($\omega = \text{konst.}$), jde o pohyb rovnoměrný po kružnici.

Časová změna úhlové rychlosti je tzv. úhlové zrychlení. Píšeme

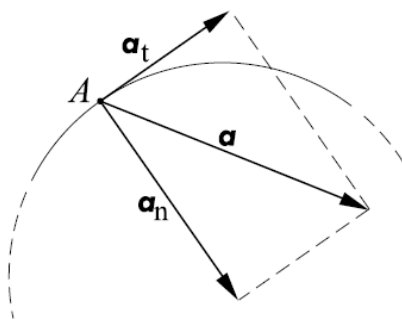
$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Jednotkou úhlového zrychlení je radián za sekundu na druhou, $[\varepsilon] = \text{s}^{-2}$.

Velikost rychlosti hmotného bodu se při rovnoměrném pohybu nemění, mění se směr rychlosti, proto má hmotný bod nenulové zrychlení. V těch bodech trajektorie, v nichž je zakřivena, míří zrychlení $\vec{a}$ na tu její stranu, na niž je zakřivena. Zrychlení v tomto případě rozložíme na tečnou složku $\vec{a}_t$ a složku normálovou $\vec{a}_n$.

Tečné zrychlení $\vec{a}_t$ má buď stejný směr jako rychlost $\vec{v}$ nebo směr opačný. Velikost tečného zrychlení lze určit jako $a_t = \frac{|\Delta v|}{\Delta t}$ pro $\Delta t \rightarrow 0$.

$$\text{Zapisujeme } a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (2.22)$$



Obr. 8 Složky zrychlení

Poznámka

Veličina Δv je změna velikosti rychlosti. Tečné zrychlení $\vec{a}_t$ charakterizuje časovou změnu velikosti rychlosti. Protože u rovnoměrného pohybu po kružnici je časová změna velikosti rychlosti nulová, je nulové i tečné zrychlení.

Normálové zrychlení v případě pohybu hmotného bodu po kružnici směřuje do středu kružnice. Jeho velikost je dána vztahem

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \quad (2.23)$$

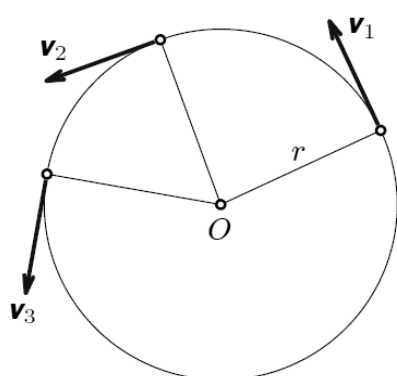
což je velikost dostředivého zrychlení.

Pozn. Podrobné odvození vztahu viz např. Šantavý, I.: Mechanika, SPN Praha 1993, s. 55.

Platí

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

Pohyb po kružnici – přehled vztahů



Úhlová dráha:

$$\varphi = \frac{s}{r}$$

Úhlová rychlost:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Jednotka: s^{-1}

Obr. 9 Obvodová rychlost

Obvodová rychlost:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Jednotka: $m \cdot s^{-1}$

Platí

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi, v = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici:

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \text{konst.}$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici je pohyb periodický.

Perioda rovnoměrného kruhového pohybu T :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$$

Jednotka: s, min

Frekvence

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f$$

Jednotka: s^{-1} .

Frekvence vyjadřuje počet otáček, které těleso vykoná za jednotku času.

Počet otáček vykonaných hmotným bodem $N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$.

V případě pohybu v rovině vyjadřujeme polohový vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ pomocí polárních souřadnic. Píšeme:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi = r \cos \omega t \\y &= r \sin \varphi = r \sin \omega t\end{aligned}\tag{2.24}$$

Po dosazení máme vektorovou rovnici rovnoměrného kruhového pohybu

$$\vec{r} = \vec{i} r \cos \omega t + \vec{j} r \sin \omega t$$

Výpočet rychlosti: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt} = -r\omega \sin \omega t \\v_y &= \frac{dy}{dt} = r\omega \cos \omega t\end{aligned}\tag{2.25}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r\omega \sin \omega t)^2 + (r\omega \cos \omega t)^2} = r\omega$$

Pozn. Použili jsme vztah mezi goniometrickými funkcemi $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Zrychlení:

$$\begin{aligned}a_x &= -r\omega^2 \cos \omega t \\a_y &= -r\omega^2 \sin \omega t\end{aligned}\tag{2.26}$$

Odtud analogicky $a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$.

Vzhledem k tomu, že platí $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0, \vec{v} \perp \vec{a}$, je zrychlení $\vec{a}$ zrychlení dostředivé. Dále platí:

$$\begin{aligned}a_t &= \frac{dv}{dt} = 0 \\a_n &= \frac{v^2}{r}\end{aligned}$$

Nerovnoměrný kruhový pohyb

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \Delta t \rightarrow 0 \text{ je } \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Úhlová rychlost je funkcí času, mírou změny pohybu je úhlové zrychlení ε . Lze psát

$$\varphi = \int \omega(t) dt + \varphi_0.$$

Pro rovnoměrně zrychlený pohyb platí $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \text{konst.}$ a úhlovou dráhu lze vypočítat jako

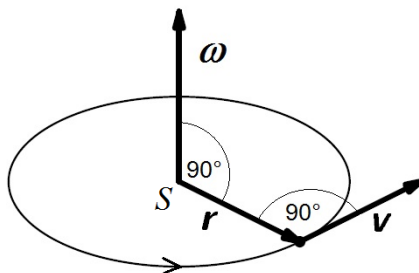
$$\varphi = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0.\tag{2.27}$$

Nerovnoměrně zrychlený pohyb po kružnici $\varepsilon = \varepsilon(t)$, potom $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$. Složky zrychlení vyjádříme pomocí úhlových veličin jako

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2,$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\varepsilon.$$

Vektorový zápis $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. (2.28)



Obr. 10 Úhlová rychlost

Otázky k opakování

Jak rozdělujeme pohyby hmotného bodu?

Jak je definován rovnoměrný přímočarý pohyb?

Charakterizujte pohyb po kružnici!

Které veličiny charakterizují nerovnoměrný pohyb?

Jaký je rozdíl mezi okamžitou a průměrnou rychlostí hmotného bodu?

Jakou rychlost ukazuje tachometr v automobilu?

Příklad:

Hmotný bod A má souřadnice (2, 6, -8). Zapište jeho polohový vektor vzhledem k počátku kartézské soustavy souřadnic.

Řešení:

$$\vec{r}_A = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

Složky polohového vektoru jsou funkcí času, protože při pohybu hmotného bodu se mění polohový vektor. Zapisujeme $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Posunutí $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, kde $\vec{r}_1$ je poloha hmotného bodu v časovém okamžiku t_1 a $\vec{r}_2$ je poloha hmotného bodu v okamžiku $t_1 + \Delta t$. Dosadíme-li za $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$, dostaneme

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \quad (2.15)$$

Příklad:

Určete posunutí hmotného bodu, víte-li, že jeho počáteční poloha je dána polohovým vektorem $\vec{r}_1 = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$ a koncová poloha je určena polohovým vektorem $\vec{r}_2 = \vec{i} - 9\vec{j} + 12\vec{k}$.

Řešení:

Numericky:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (\vec{i} - 9\vec{j} + 12\vec{k}) - (5\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}) = (1-5)\vec{i} + (-9-6)\vec{j} + (12-7)\vec{k} = -4\vec{i} - 15\vec{j} + 5\vec{k}$$

Velikost polohového vektoru

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Příklad:

Určete velikost polohového vektoru $\vec{r}_1 = 5\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}$.

Řešení:

$$r = \sqrt{5^2 + 10^2 + (-10)^2} = \sqrt{25 + 100 + 100} = \sqrt{225} = 15$$

2.2 Dynamika hmotného bodu – síla a pohyb

V dynamice zkoumáme pohyb hmotného bodu z hlediska jeho příčiny. Název je odvozen z řeckého „*dynamis*“, což znamená síla.

Příčiny změny pohybu jsou ve vzájemném působení (interakci) mezi tělesy. Zkoumáme např. účinek vozovky na pneumatiky, tenisové rakety na míček...

Hlavní zákonitosti jsou vyjádřeny ve třech pohybových zákonech, které formuloval Isaac Newton – Newtonovy pohybové zákony. Tyto zákony platí za předpokladu, že rychlost těles je velmi malá oproti rychlosti světla a interagující částice leží mimo oblast mikrosvětla.



Isaac Newton

Historická poznámka:

Isaac Newton (25.12.1643 – 20. 3.1727), filozof, fyzik, matematik. V roce 1705 byl povýšen do šlechtického stavu. Své poznatky publikoval v díle „Matematické principy přírodní filozofie“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*), které vyšlo v Londýně v roce 1687. Ve svých studiích navázal na dílo M. Koperníka, J. Keplera, G. Galileiho. Nemalý je jeho přínos k rozvoji matematiky – položil základy diferenciálního a integrálního počtu.

Další informace <http://zivotopisyonline.cz/isaac-newton.php/>

Newtonovy pohybové zákony

Působením okolních těles na dané těleso (hmotný bod) se obecně mění jeho vektor rychlosti. Toto působení, závislé na vzájemných polohách těles, nazýváme silou $\vec{F}$.

Ne vždy se těleso musí pohybovat, když na ně působí síla. Pokud působí na těleso nebo hmotný bod více sil, skládají se.

Účinky síly

- dynamické
- statické (těleso se deformuje)

Síla je vektorová veličina, její jednotkou je 1 N.

Kvantitativně posuzujeme síly podle jejich účinků – zda se ruší, jsou-li stejně orientované, stejně velké apod. Ruší-li se všechny síly a je-li výsledný moment sil působících na těleso nulový, potom je těleso v rovnováze. Podmínkami rovnováhy se zabývá statika.

Zákonitosti, jimiž se řídí mechanické děje závisí podstatně na tom, v jaké soustavě je zkoumáme. Nejjednodušší je inerciální vztažná soustava.

Definice inerciální vztažné soustavy: Inerciální vztažná soustava (INVS) je soustava, v níž každý volný hmotný bod se buď pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo je v klidu.

Definujeme volné těleso (volnou částici) – je to těleso, na které působí jen gravitační pole stálé. Ve vesmíru lze za volné těleso považovat Slunce, neboť vliv planet sluneční soustavy na Slunce je zanedbatelný.

Volný hmotný bod je částice, na kterou její okolí nepůsobí, tzn. Výslednice sil je nulová. Jako volná se chová částice např. tehdy nelze-li vliv jednotlivých okolních objektů na její pohyb zjistit v rámci přesnosti prováděných měření (popř. se vlivy okolních objektů kompenzují).

I. Newtonův zákon: Je-li volný hmotný bod v klidu vzhledem ke vhodně zvolené inerciální vztažné soustavě, pak něm setrvává. Pohybuje-li se stálou rychlostí, bude v tomto pohybu neustále pokračovat.

Jiná formulace: Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, dokud není vnějšími silami (působením jiných těles) nuceno tento stav změnit.

Rovnoměrný přímočarý pohyb a klid jsou rovnocenné stavy. Jedná se vždy o relativní pohyby závislé na volbě vztažné soustavy.

S každou volnou částicí lze spojit vztažnou soustavu, v níž jsou ostatní volné částice v klidu, nebo se vůči ní pohybují stálou rychlostí.

I. Newtonův zákon je tzv. zákon setrvačnosti, vztažné soustavy, které definuje, jsou inerciální vztažné soustavy.

Vlivem silového působení jiných těles nebo polí se mění pohybový stav hmotného bodu nebo tělesa. Změna pohybového stavu tělesa i při působení stejných sil nebude vždy stejná. Tento závěr popisuje **II. Newtonův zákon**, který můžeme zapsat ve tvaru

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

kde m je hmotnost hmotného bodu (tělesa), $\vec{a}$ je zrychlení. Hmotnost tělesa charakterizuje setrvačnost tělesa.

Působí-li na dvě různá tělesa stejná síla, potom, které získá vlivem silového působení menší zrychlení, musí mít větší setrvačnou hmotnost.

Hmotnost určujeme vážením, na základě vyšetření pohybu v elektromagnetickém poli (ionty, elektrony), popř. na základě gravitačních vlastností. Pro rychlost blízkou rychlosti světla platí relativistický vztah pro hmotnost

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kde m_0 je klidová hmotnost, v je rychlost částice, c je rychlost světla.

Slovní vyjádření II. Newtonova pohybového zákona:

Působí-li na hmotný bod o hmotnosti m tělesa a pole silami o výslednici $\vec{F}$, má hmotný bod zrychlení $\vec{a}$ takové, že platí $\vec{F} = m\vec{a}$.

Jednotkou síly je 1 N: 1 newton je velikost síly, která udělí tělesu o hmotnosti 1 kg zrychlení o velikosti $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Zapamatujte si

V inerciální vztažné soustavě charakterizuje síla působení jednoho tělesa (nebo fyzikálního pole) na druhé těleso. Neexistuje síla bez něčeho, co by ji vyvolávalo.

Do výslednice jsou zahrnuty jen síly, které působí na vymezené těleso.

Výslednice zahrnuje pouze vnější síly, tj. ty, jimiž na těleso působí jiná tělesa.

Působí-li síla na těleso, které nelze považovat za hmotný bod, závisí její účinek na poloze jejího působišť.

Pohybová rovnice $\vec{F} = m\vec{a}$, $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Lze psát

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.29)$$

Vztah platí pro nerelativistické rychlosti.

Veličina definovaná vztahem $\vec{p} = m\vec{v}$ je hybnost částice (hmotného bodu) o hmotnosti m .

Jednotka hybnosti je $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

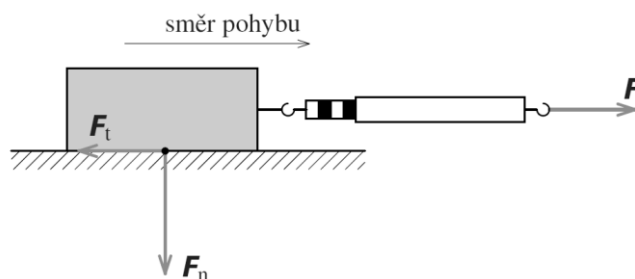
Pomocí hybnosti lze II. Newtonův zákon vyslovit takto: Časová změna hybnosti je přímo úměrná působící vnější síle a má směr této síly.

Nepůsobí-li na hmotný bod vnější síly, potom $\vec{F} = 0$, $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, $\vec{p} = \text{konst.}$

Základní druhy sil v mechanice

- *Gravitační síla* $\vec{F}_g$ – je způsobena gravitačním polem, které kolem sebe i ve svém vnitřku budí všechna tělesa v celém svém objemu.

- **Tíhová síla $\vec{F}_G$** – je síla, kterou působí tíhové pole Země v blízkosti povrchu Země. Skládá se z gravitační síly $\vec{F}_g$ způsobené gravitačním polem Země a odstředivé síly setrvačné, která vzniká v důsledku otáčení Země. Jestliže na těleso, které je v blízkosti Země, nepůsobí jiná síla než tíhová, koná pohyb se zrychlením $\vec{g}$ (např. volný pád). Jeho velikost se v závislosti na místě mění, v našich zeměpisných šířkách je jeho velikost asi $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Tíhovou sílu zakreslujeme do těžiště tělesa. Těžiště je působiště tíhové síly na těleso, které se nachází v homogenním tíhovém poli. Těžiště lze určit zavěšováním tělesa, potom je těžiště průsečíkem těžnic. Obecně se jedná o působiště výsledné tíhové síly, kterou získáme složením tíhových sil působících na elementární části tělesa. Platí $\vec{F}_G = m\vec{g}$. Vektor tíhového zrychlení $\vec{g}$ udává svislý směr v daném místě.
- **Třecí síla** – vzniká na styčných plochách dvou těles, která jsou k sobě přitlačována. Síly, kterými tělesa na sebe působí, mají nenulové tečné složky – tzv. tření. Velikost třecí síly je přímo úměrná velikosti tlakové síly, kterou těleso působí kolmo na podložku.



Obr. 11 Síly tření

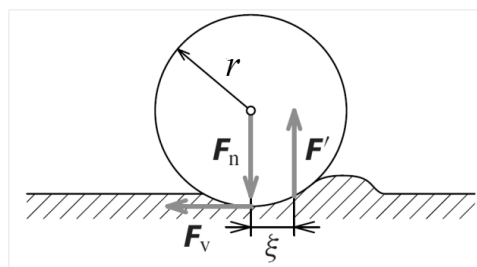
Rozlišujeme smykové tření a valivé tření.

Smykové tření statické (klidové) – třecí síly jsou tečné složky sil, jimiž na sebe navzájem působí tělesa na styčných plochách, které jsou vůči sobě v klidu. Chceme-li, aby se těleso pohnulo, je třeba překonat klidovou třecí sílu F_{0t} .

$$F_{0t} = f_0 F_n,$$

kde f_0 je součinitel klidového tření.

Smykové tření dynamické – třecí síly jsou tečné složky sil, jimiž na sebe navzájem působí tělesa na styčných plochách, které jsou ve vzájemném pohybu, $F_t = f F_n$. Součinitel f závisí na jakosti třecích ploch (nezávisí na jejich velikosti) a na rychlosti pohybu (s rostoucí rychlostí mírně klesá). Pro danou dvojici styčných ploch je vždy $f < f_0$. Např. pneumatika na betonu: sucho $f = 0,6$, mokro $f = 0,3$ až $0,5$. Koeficienty f, f_0 jsou bezrozměrové.



Obr. 12 Valivé tření

Valivé tření (valivý odpor) – je síla, která působí proti směru pohybu při pohybu valivém, $F_t = \xi \frac{F_n}{r}$.

Součinitel valivého tření ξ má rozměr délky a udává se v týchž jednotkách, jako poloměr r (obr. 12). Součinitel valivého tření je mnohem menší než součinitel tření smykového. Využití – kuličková ložiska (převod smykového tření na valivé).

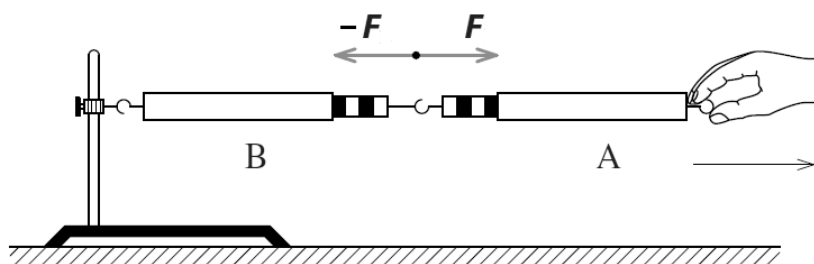
- *Tíha* – označuje se $\vec{G}$, je to síla, kterou těleso nacházející se v tíhovém poli Země působí na jiná tělesa. Projeví se jako tahová síla na svislý závěs nebo jako tlaková síla na vodorovnou podložku.

III. Newtonův pohybový zákon: Působí-li jedno těleso na druhé při jejich styku silou $\vec{F}$, působí druhé těleso na první silou $\vec{F}' = -\vec{F}$. Zákon platí, i když tělesa na sebe působí prostřednictvím polí, jsou-li v dané vztažné soustavě trvale v klidu.

Nazve-li se jedna (kterákoli) ze sil akce, je druhá reakce.

Pozn. Název zákona je také zákon akce a reakce, nebo zákon vzájemného působení.

Síly akce a reakce působí vždy na různá tělesa. Nesčítají se proto ve výslednou sílu a nemohou se vyrušit.



Obr. 13 Zákon akce a reakce

Poznámka

Vzájemné působení částic, polí a těles se obecně nazývá interakce. Lze rozlišit různé typy interakcí:

- Gravitační interakce – mezi všemi částicemi a tělesy.
- Elektromagnetická interakce – mezi elektricky nabitými částicemi a tělesy.
- Slabé interakce – v dějích, v nichž dochází k přeměně některých elementárních částic.
- Silné interakce – mezi částicemi v jádrech atomů i mezi některými jinými částicemi.

Shrnutí

I. Newtonův zákon: Existují inerciální vztažné soustavy, tj. soustavy, v nichž je každý volný hmotný bod buď v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

II. Newtonův zákon: Působí-li na hmotný bod o hmotnosti m tělesa a fyzikální pole silami o výslednici $\vec{F}$, má hmotný bod zrychlení $\vec{a}$ takové, že platí $\vec{F} = m\vec{a}$.

III. Newtonův zákon: Působí-li jedno těleso na druhé při jejich styku silou $\vec{F}$, působí druhé těleso na první silou $\vec{F}' = -\vec{F}$.

Otázky k opakování

Čím je charakterizován pohybový stav těles?

Vyslovte Newtonovy pohybové zákony.

Jak vyjadřujeme časový účinek síly?

Uveďte příklady využití síly tření.

Literatura

Šantavý, I.: Mechanika, SPN, Praha 1993.

Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: Fyzika I. Vutium, Prometheus 2001.

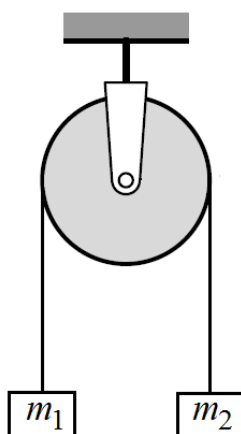
Příklady:

Pohyb dvou těles spojených vláknem

Vlákno (provaz) plní funkci vazby, proto je zrychlení obou těles stejné.

1. Na provaze vedeném přes kladku jsou zavěšena závaží o hmotnostech m_1 a m_2 . Hmotnost provazu a kladky zanedbejte. Kladka se otáčí bez tření. Studujte pohyb těles po uvolnění soustavy.

Řešení: Šipkami vyznačíme směr pohybu kladky. Zavěšená tělesa považujeme za hmotné body. Pro každé těleso zvlášť zapíšeme Newtonův pohybový zákon. Na každé těleso působí tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a síla, kterou je napínána nit – označíme ji $\vec{T}$. Pohybové rovnice lze psát:



Obr. 14 Tělesa zavěšená na provázku vedeném přes kladku

Těleso 1: $m_1 a = m_1 g - T$

Těleso 2: $m_2 a = T - m_2 g$

Uvedené rovnice lze řešit jako soustavu dvou rovnic, z nichž můžeme vypočítat zrychlení soustavy a (vyloučením síly, kterou je napínán provaz)

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g,$$

popř. určit sílu T .

Při řešení konkrétních příkladů je možné, že vyjde hodnota zrychlení soustavy záporná. Znamená to, že jsme směr pohybu soustavy zvolili opačný.

2. Provaz vedený přes kladku spojuje těleso klouzající bez tření na vodorovné podložce a těleso volně visící na opačném konci. Zavěšené těleso klesá a uvádí do pohybu těleso ležící na podložce.

Řešení:

Těleso 1: $m_1 a = m_1 g - T$

Těleso 2: tíhová síla je kompenzována normálovou silou (pevností podložky), proto $m_2 a = T$.

Úlohy řešíme pro hodnoty $m_1 = 5 \text{ kg}$ a $m_2 = 3 \text{ kg}$.

Ze vztahu pro těleso 2 dosadíme za T do rovnice pro těleso 1: $m_1 a = m_1 g - T = m_1 g - m_2 a$. Odtud

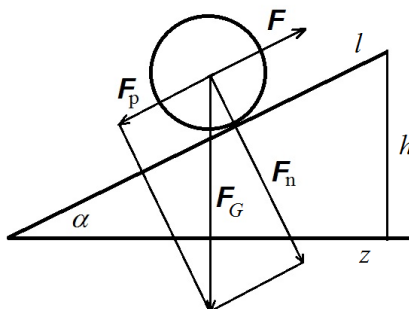
$$m_1 a + m_2 a = m_1 g \Rightarrow a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Po dosazení číselných hodnot

$$a = \frac{5 \text{ kg}}{5 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Rozklad sil na nakloněné rovině

Síla $\vec{F}$ je síla, která musí na těleso na nakloněné rovině působit, aby bylo v rovnováze. Její velikost je stejná, jako velikost pohybové složky tíhové síly, ale má opačný směr.



Obr. 15 Rozklad sil na nakloněné rovině

Tíhovou sílu o velikosti $F_G = mg$ rozložíme na složku ve směru nakloněné roviny

$$F_p = mg \sin \alpha = mg \frac{h}{l} = F_G \sin \alpha \dots \text{složka pohybová}$$

a složku normálovou

$$F_n = mg \cos \alpha = mg \frac{z}{l} = F_G \cos \alpha \dots \text{složka tlaková (statická).}$$

Odtud $a = g \sin \alpha$.

Pohyb po nakloněné rovině je pohyb rovnoměrně zrychlený, dráhu a rychlost vypočítáme pomocí vztahů

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha, v = g t \sin \alpha.$$

Mezi povrchem nakloněné roviny a tělesem působí třecí síla $F_t = f m g \cos \alpha$.

Z Newtonova zákona platí $F = F_p - F_t = m g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$.

Odtud pro zrychlení $a = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$, kde f je součinitel smykového tření.

Příklad:

Vyšetřete pohyb hmotného bodu, na který působí pouze tíhová síla odpovídající jeho hmotnosti.

Řešení:

Hmotný bod koná pohyb ve směru opačném oproti kladnému směru osy y , což odpovídá směru tíhového zrychlení $\vec{g}$. Souřadnice y okamžité polohy hmotného bodu je funkcí času, souřadnice x a z jsou nulové. Platí: $y = y(t)$

$$F_y = m a_y = m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m g$$

Odtud

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g,$$

$$\frac{dy}{dt} = v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g.$$

Řešením této rovnice (integrací) máme $v = -gt + k_1$.

Stanovení integrační konstanty k_1 z počátečních podmínek: $t = 0, v = v_0 \Rightarrow v = -gt + v_0$

Výsledek dosadíme a pokračujeme v integraci rovnice:

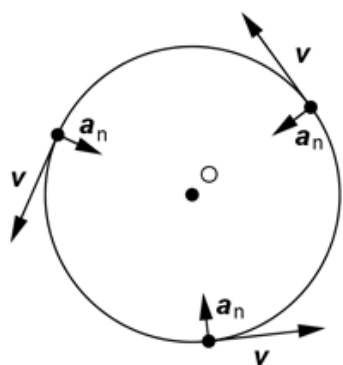
$$\frac{dy}{dt} = -gt + v_0$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + k_2$$

Integrační konstantu k_2 určíme opět z počátečních podmínek: $t = 0, y_0 = k_2$.

Výsledná rovnice pro pohyb hmotného bodu v tíhovém poli Země je $y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0$.

Síly při křivočarém pohybu



Obr. 16 Rychlost a zrychlení při křivočarém pohybu (převzato Techmania, Edutorium)

Křivočarý pohyb se v přírodě vyskytuje nejčastěji. Omezíme se pro jednoduchost na pohyb hmotného bodu po kružnici. Uvažujeme inerciální vztažnou soustavu. Na hmotný bod působí několik sil, jejichž výslednice je rovna $\vec{F}_v = m\vec{a}$. Výslednou sílu můžeme rozdělit do dvou složek.

- Normálová složka $\vec{F}_{vn}$ je vždy nenulová, míří do středu kružnice a má velikost

$$F_{vn} = \frac{mv^2}{r},$$

pro $v = \omega r$ lze psát

$$F_{vn} = m\omega^2 r. \quad (2.30)$$

Normálová složka síly mění směr rychlosti hmotného bodu, v případě kruhového pohybu je to síla dostředivá.

- Tečná složka $\vec{F}_{vt}$ (tangenciální) je při rovnoměrném pohybu hmotného bodu nulová, potom $\vec{F}_v \perp \vec{v}$. Při nerovnoměrném pohybu může mít tečná složka stejný směr jako rychlost $\Rightarrow$ rychlost hmotného bodu se zvětšuje, nebo má směr opačný $\Rightarrow$ rychlost se zmenšuje. Platí

$$F_{vt} = m \frac{|\Delta v|}{\Delta t}, \text{ popř. } F_{vt} = m \frac{dv}{dt}. \quad (2.31)$$

Tečná složka mění velikost rychlosti hmotného bodu.

Rozklad síly při křivočarém pohybu:

$$\text{normálová složka } \vec{F}_{vn} : F_{vn} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\text{tečná složka } \vec{F}_{vt} : F_{vt} = m \frac{dv}{dt}$$

Příklad 1

Člověk o hmotnosti 80 kg se pohybuje na řetízkovém kolotoči rovnoměrně rychlostí $v = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ po kružnici o poloměru $r = 5 \text{ m}$. Určete sílu, kterou působí člověk na řetízky. Hmotnost sedačky a odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

Na člověka (považujeme jej za hmotný bod) působí tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a řetízky na něj působí silou $\vec{F}_1$ (její směr ani velikost neznáme). Výslednicí obou sil je síla dostředivá $\vec{F}_v$ o velikosti $F_v = \frac{mv^2}{r}$.

Po dosazení: $F_v = \frac{80 \text{ kg} \cdot 5^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{5 \text{ m}} = 400 \text{ N}$

Jakou silou působí řetízky na člověka?

Platí $\vec{F}_v = \vec{F}_G + \vec{F}_1$, odtud síla $\vec{F}_1 = \vec{F}_v - \vec{F}_G$. Velikost a směr této síly určíme na základě operací s vektory:

Směr

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_v}{F_G} = \frac{m \frac{v^2}{r}}{mg} = \frac{400 \text{ N}}{800 \text{ N}} = 0,5,$$

$$\alpha = 26^\circ 30'.$$

Velikost

$$F_1 = \sqrt{F_v^2 + F_G^2} = \left(\sqrt{400^2 + 800^2} \right) \text{ N} \doteq 890 \text{ N}.$$

Pohyb ve svislém kruhu

Jedná se o situaci, kdy na podložce, která je zavěšena na pevném závěsu, stojí sklenice s vodou. Pomocí závěsu sklenici roztočíme. Při vhodné rychlosti voda ze sklenice nevyteče. Podobný příklad pohybu představuje cirkusová atrakce – jízda na motocyklu po dráze ve tvaru smyčky.

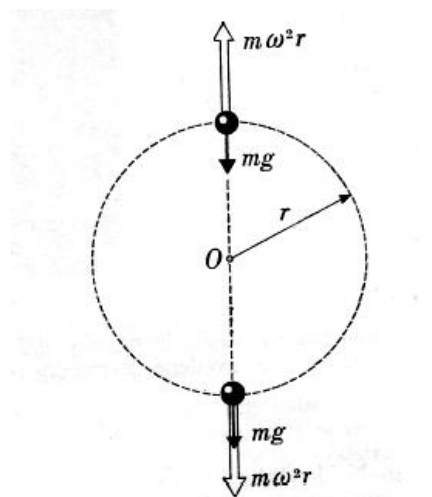
Vyjádříme-li síly, které působí na hmotný bod (těleso) pohybující se po uvedené trajektorii, máme:

V nejvyšším bodě působí na hmotný bod síla

$$F_1 = m\omega^2 r - mg.$$

V nejnižším bodě působí na hmotný bod síla

$$F_2 = m\omega^2 r + mg.$$



Obr. 17 Pohyb ve svislém kruhu

Pokud bude v nejvyšším bodě síla $F_1 = 0$, vlákno nebude napínáno. Tzn. $m\omega^2 r = mg$ a můžeme tedy vypočítat jednak dobu oběhu hmotného bodu, ale také postupnou rychlost v

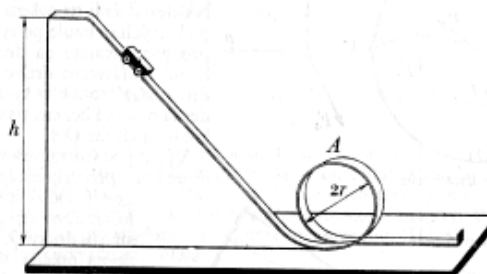
$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{mr}} = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{2\pi}{T},$$

tedy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}, \quad v = \omega r = \sqrt{rg}.$$

Příklad 2

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo „Dare Devil“ Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti. Předpokládejte, že smyčka je kruhová a má poloměr $r = 2,7$ m. Jakou nejmenší rychlostí $\vec{v}$ mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt?



Obr. 18 Jízda ve smyčce (převzato Halliday, Resnick – Mechanika, str. 128)

Řešení:

Na artistu působí tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$ a normálová síla $\vec{F}_N$, již působí smyčka na kolo s akrobatem. Zrychlení $\vec{a}$ směřuje do středu smyčky a má velikost $a = \frac{v^2}{r}$.

Užitím II. Newtonova zákona máme

$$\sum F_y = -N - mg = ma_y = -ma = -m \frac{v^2}{r}.$$

Pro $N = 0$ (tj. kolo ztratí kontakt se smyčkou) máme $mg = m \frac{v^2}{r}$.

Po dosazení číselných hodnot: $v = \sqrt{gr} = \sqrt{9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 2,7 \text{ m}} = 5,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Aby Diavolo neztratil kontakt se smyčkou, musel jejím nejvyšším bodem projet rychlostí větší než $5,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (v tomto případě je velikost tlakové síly mezi koly a smyčkou nenulová).

Pokud máme situaci, že např. pouštíme vozík z určité výšky a chceme, aby proběhl celou kruhovou smyčkou, můžeme na základě uvedených vztahů vypočítat, z jaké výšky h musí být spuštěn. Prakticky lze tuto situaci modelovat pomocí stavebnice Kuličkodráha.

Příklad řešíme tak, že předpokládáme, že v nejvyšším bodě kruhu musí být odstředivá síla, která přitlačuje vozík k podložce, stejně velká nebo větší než je tíha vozíku. Platí

$$m \frac{v^2}{r} \geq mg, \text{ odtud } v^2 \geq rg.$$

Pomocí úvahy o energii určíme výšku h . Musí platit, že energie vozíku v nejvyšším místě musí být stejná jako při startu, tj.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg2r = mgh, \quad v^2 = rg, \text{ odtud po dosazení } h = 2,5r.$$

V daném případě jsme neuvažovali tření.

Případ, kdy je třeba uvažovat tření, je například řešení problému průjezdu auta nebo cyklisty zatáčkou. Ke smyku nedojde, pokud bude třecí síla fmg větší nebo rovna odstředivé síle působící na cyklistu v zatáčce.

Neinerciální vztažné soustavy

V neinerciální vztažné soustavě neplatí I. Newtonův zákon ani zákon akce a reakce. Těleso mění svůj pohybový stav i když na ně nepůsobí žádná síla. Neinerciální vztažná soustava se vzhledem k inerciální vztažné soustavě nepohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, ale jinak. Pohyby těles můžeme posuzovat z hlediska pozorovatele mimo neinerciální vztažnou soustavu nebo pozorovatele v této soustavě. Pokud se pozorovatel nachází v neinerciální vztažné soustavě a tato soustava se pohybuje se zrychlením $\vec{a}$, pak pozorujeme pohyb tělesa se zrychlením $-\vec{a}$. Tento pohyb vysvětlíme existencí setrvačné síly $\vec{F}_s = -m\vec{a}$. Setrvačná síla není důsledkem vzájemného silového působení tělesa s jinými tělesy nebo silovými poli.

Příkladem neinerciální vztažné soustavy může být soustava pohybující se v tíhovém poli svislým směrem. Tuto soustavu může představovat kabina výtahu a v ní je těleso zavěšené na siloměru.

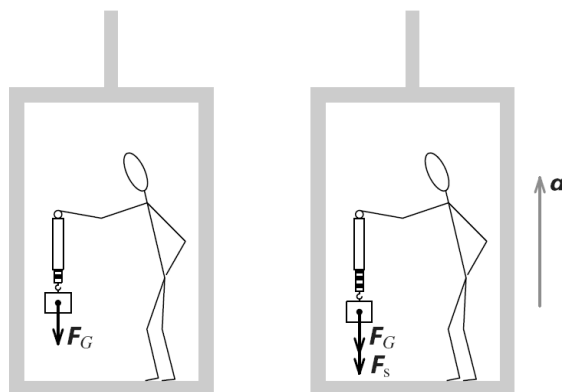
1. Pozorovatel vně kabiny

- a) Kabina se rozjíždí směrem vzhůru se zrychlením $\vec{a}$: na těleso působí síla $\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}'$ ($\vec{F}'$ je síla, kterou působí na těleso podlaha kabiny). Na základě zákona akce a reakce působí těleso na podlahu silou $\vec{G} = -\vec{F}'$, velikost tíhy $G = F' = F_G + F$. Stav, který vzniká je přetížení, jeho velikost je $F = ma$.
- b) Kabina se rozjíždí směrem dolů se zrychlením $\vec{a}$: Nyní je velikost $F' = F_G - F$ a velikost tíhy podle zákona akce a reakce je $G = F' = F_G - F < F_G$.

Pokud kabina výtahu začne padat volným pádem, působí na těleso síla $\vec{F} = m\vec{g} = \vec{F}_G$, velikost tíhy $G = F' = F_G - F = 0$. Těleso je ve stavu beztlíže.

2. Pozorovatel uvnitř kabiny

- a) Kabina se rozjíždí směrem vzhůru se zrychlením $\vec{a}$: na těleso působí dodatečná setrvačná síla $\vec{F}_s = -m\vec{a}$, $G = F_G + F_s = mg + ma$. Vzniká přetížení (obr. 19).



Obr. 19

b) Kabina se rozjíždí směrem dolů se zrychlením $\vec{a}$:

$G = F_G - F_s = mg - ma$. Pokud je $\vec{a} = \vec{g}$ (volný pád), $G = 0$ a nastává stav beztíže, nevzniká žádné prodloužení pružiny siloměru.

Další příklady neinerciálních soustav – rotující soustavy:

Odstředivá síla – jejím důsledkem je vznik odstředivého zrychlení.

$$\vec{F}_o = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r},$$

kde m je hmotnost tělesa, $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti, kterou se otáčí soustava, $\vec{r}$ je polohový vektor tělesa. Velikost odstředivé síly určíme pomocí vztahu $F_o = m\omega^2 r$

Eulerova síla – působí v neinerciální rotující soustavě, v níž úhlové zrychlení $\varepsilon \neq 0$, tzn. úhlová rychlost ω rotace není konstantní.

$$\vec{F}_E = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r},$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor tělesa o hmotnosti m , $\vec{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení rotující soustavy.

Coriolisova síla

Coriolisova síla působí na tělesa, u kterých se v rotující neinerciální soustavě mění jejich vzdálenost od osy rotace. Její směr je kolmý ke spojnici těleso - osa otáčení a způsobuje stáčení trajektorie tělesa proti směru otáčení soustavy.

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v},$$

kde m je hmotnost tělesa, $\vec{v}$ je rychlost tělesa v neinerciální vztažné soustavě, $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčení neinerciální soustavy. Velikost Coriolisovy síly určíme pomocí vztahu

$$F_C = 2m\omega v \sin \alpha,$$

kde α je úhel sevřený mezi vektorem úhlové rychlosti ω a vektorem rychlosti v .

Podrobněji o pohybech v neinerciálních vztažných soustavách viz např.: Šantavý, I.: Mechanika, SPN, Praha 1993, str. 113 nebo Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky, Prometheus, Praha 2006, str. 60.

Literatura

Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001. Mechanika, str. 141–188.

2 IMPULS SÍLY, HYBNOST, PRÁCE A ENERGIE

3.1 Impuls síly a hybnost

Představte si následující situaci: na podlaze leží bedna, kterou někdo táhne pomocí provazu. Síla $\vec{F}$, kterou na bednu působí provaz, je během časového intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ stálá. Definujeme:

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t \quad (3.1)$$

tzv. impuls síly. Impuls síly v daném časovém intervalu je vektorová veličina.

Jednotka je $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Impuls síly má stejný směr jako síla $\vec{F}$, velikost vypočítáme podle vztahu

$$I = F\Delta t.$$

Poznámka

Hodnota impulsu nezávisí na tom, zda a jak se těleso pohybuje, či zda na ně působí ještě jiné síly.

Význam impulsu síly:

Uvažujme II. Newtonův pohybový zákon ve tvaru $\vec{F} = m\vec{a}$, kde $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$. Potom $\vec{F} = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Odtud plyne

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}, \quad \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}.$$

Změna hybnosti se rovná impulsu síly.

Víme-li, že nějaké síly působily na hmotný bod po dobu $t_2 - t_1$ stálou výslednou silou $\vec{F}$, tím se změnila hybnost z $\vec{p}_1$ na $\vec{p}_2$, potom lze psát

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1), \quad (3.2)$$

tj. impulsová věta pro hmotný bod.

Hybnost soustavy hmotných bodů

Hybnost soustavy hmotných bodů (v určité vztažné soustavě) je definována jako vektorový součet hybností všech jejích částí

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \text{ hybnost soustavy} \quad (3.3)$$

Síly působící na soustavu hmotných bodů:

- síly vnitřní – jsou to síly, kterými na sebe navzájem působí jednotlivé části soustavy,
- síly vnější – síly, kterými na soustavu působí okolí.

Sečteme-li všechny síly působící na jeden vybraný hmotný bod soustavy, zjistíme, že součet vnitřních sil bude nulový (plyne z III. Newtonova zákona) a pro součet vnějších sil platí

$$\vec{F}_{\text{vn}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}.$$

Pro $\Delta t \rightarrow 0$ lze psát $\vec{F}_{\text{vn}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Obecně síla může měnit směr i velikost. Potom je nutné vektor hybnosti $\vec{p}$ i vektor síly $\vec{F}$ považovat za proměnné vektory, tzn. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, slovně: časová změna hybnosti se rovná síle působící na těleso a má s ní stejný směr.

Obecné řešení v časovém intervalu t_0 až t rovnice $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt}(m\vec{v}) dt$$

Řešení pravé strany po dosazení mezí je ve tvaru

$$m\vec{v}(t) - m\vec{v}(t_0) = m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{p} - \vec{p}_0.$$

Platí

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{p} - \vec{p}_0.$$

Pozn. Jedná se o vektorovou rovnici, kterou lze rozložit na jednotlivé složky ve směru osy x , y , resp. z .

Příklady využití – nárazové síly, tj. celkový impulz je roven změně hybnosti.

Zákon zachování hybnosti

Je-li výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová ($\vec{F}_{\text{vn}} = \vec{0}$), potom $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{0}$, tzn. $\vec{p}_2 = \vec{p}_1$. Protože $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$ jsou hybnosti soustavy ve dvou různých okamžicích, je hybnost soustavy stálá, tj. platí $\vec{p} = \text{konst.}$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \overline{\text{konst.}} \text{ zákon zachování hybnosti}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = \overline{\text{konst.}} \quad (3.4)$$

Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se vzájemným silovým působením nemění. Hybnosti jednotlivých hmotných bodů se mohou měnit.

Shrnutí

Impuls síly:

$$\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p}$$

Změna hybnosti je rovna impulsu síly.

Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů se vzájemným silovým působením nemění.

Kontrolní otázky

Vyslovte definici impulsu síly, vysvětlete praktický význam.

Jak je definována veličina hybnost hmotného bodu.

Vyslovte zákon zachování hybnosti.

Literatura:

Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001. Mechanika. Str. 141-188.

Příklad 1:

Zpětný náraz pušky

Střelu a zbraň považujeme za izolovanou soustavu dvou hmotných bodů, jejíž celková hybnost před výstřelem je nulová. Při výstřelu vzniknou shořením střelného prachu plyny, které působí stejně velkými tlakovými silami na střelu a na stěnu uzávěru pušky. Střela a puška jsou v důsledku sil akce a reakce uvedeny do pohybu vzájemně opačnými směry, mají hybnosti $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$. Poněvadž se celková hybnost $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ soustavy nemění, platí $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$.

Je-li m_1 hmotnost střely a m_2 hmotnost pušky, $\vec{v}_1$ rychlost střely, $\vec{v}_2$ rychlost pušky, můžeme psát:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$$

Hybnosti střely a pušky po výstřelu jsou stejně velké a opačně orientované.

Z velikosti hybnosti lze určit poměr rychlostí střely a pušky:

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Velikosti rychlosti střely a pušky jsou v opačném poměru než jejich hmotnosti.

Poznámka

Této vlastnosti se využívá u reaktivního motoru u tryskových letadel, raketových střel a reaktivních turbín.

3.2 Práce a výkon, energie

Kinetická energie

Energie je skalární fyzikální veličina, která charakterizuje stav soustavy. Tzn., že hodnota energie je dána hodnotami veličin, parametrů, které charakterizují stav soustavy.

Kinetická energie hmotného bodu je fyzikální veličina, která určitým způsobem charakterizuje jeho pohybový stav.

Kinetická energie částice o hmotnosti m , která se pohybuje rychlostí $\vec{v}$ (která je velmi malá ve srovnání s rychlostí světla), je definována vztahem

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.5)$$

Kinetická energie nemůže být nikdy záporná.

Jednotkou energie je joule J, $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

V oblasti atomové fyziky používáme jednotku elektronvolt (eV): $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Částice, či soustava je v interakci se svým okolím. Jestliže se změní vlastnosti okolí (parametry), dochází k přenosu energie mezi tělesem (částicí, soustavou) a okolím.

Kinetická energie souvisí s prací, kterou konají síly působící na částici, když se mění velikost její rychlosti. Práci lze vyjádřit jako změnu kinetické energie.

Vyjádříme-li počáteční kinetickou energii částice jako $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$ a konečnou kinetickou

energii jako $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, lze práci, kterou vykoná síla $\vec{F}$ definovat pomocí vztahu

$$W = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}.$$

Uvedené vztahy platí pro hmotný bod, resp. částici, kterou lze hmotným bodem nahradit.

Příklad 1

Hozený kámen o hmotnosti 0,4 kg se v určitém okamžiku pohyboval v laboratorní soustavě rychlostí $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a o chvíli později rychlostí $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jakou celkovou práci vykonaly tíhová síla a síla odporu vzduchu?

Řešení:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = (0,5 \cdot 0,4 \cdot 6^2 - 0,5 \cdot 0,4 \cdot 8^2) \text{ J} = -5,6 \text{ J}.$$

Ve fyzice je práce často zavedena jako fyzikální veličina definovaná tak, že charakterizuje dráhový účinek síly, kterou působí při nějakém ději jedno těleso (nebo pole) na druhé těleso.

Nechť na pohybující se těleso, které se pohybuje přímočaře jedním směrem, působí stálá síla $\vec{F}$. Práce W vykonaná touto silou na úseku délky s je definována jako skalární veličina (práce stálé síly)

$$W = Fs \cos \alpha, \quad (3.6)$$

kde α je úhel sevřený vektorem rychlosti působíště síly a silou $\vec{F}$.

Na základě uvedené definice lze jednotku joule vyjádřit také: $J = N \cdot m$

Pro úhel α ostrý je práce kladná, pro úhel α tupý, je práce záporná. Je-li $\vec{F} \perp \vec{v}$, je $W = 0$.

Jiné zápisy vztahu:

$$W = F_s s, \text{ kde } F_s = F \cos \alpha \text{ (} F_s \text{ je průmět síly } \vec{F} \text{ do směru rychlosti } \vec{v} \text{)}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Práce W výslednice několika sil působících v jednom bodě je rovna součtu prací jednotlivých sil

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n. \quad (3.7)$$

Práce síly na trajektorii sestávající z několika přímých úseků je rovna součtu prací vykonaných na jednotlivých úsecích.

Práce proměnné síly

Pohybuje-li se působíště síly působící na nějaké těleso po křivce a navíc je tato síla v různých místech různá, tzn. že je funkcí dráhy s , potom práce proměnné síly na určitém úseku (např. A, B) je dána vztahem

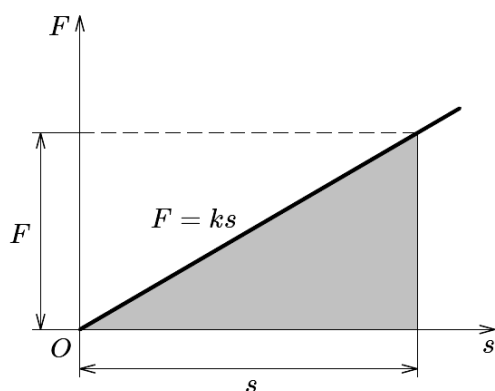
$$W = F_1 \cos \alpha_1 \Delta s_1 + F_2 \cos \alpha_2 \Delta s_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n \Delta s_n$$

Jestliže úsek trajektorie mezi body A, B rozdělíme na velmi mnoho malých úseků, bude výsledná práce součtem všech elementárních prací, což lze zapsat

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F ds \cos \alpha.$$

V případě konzervativních sil platí $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $d\vec{r}$ je posunutí tělesa.

Pozn. konzervativní síly jsou např. gravitační síla, tíhová síla, síla pružnosti.



Obr. 20 Pracovní diagram

Znázornění síly jako funkce dráhy = tzv. pracovní diagram.

$$F = \text{konst.}$$

$$F = ks, \quad W = \frac{1}{2} Fs = \frac{1}{2} ks^2$$

Důkaz souvislosti mezi změnou kinetické energie a prací.

Hmotný bod o hmotnosti m se působením síly $F(x)$, která působí ve směru osy x , pohybuje z počáteční polohy x_1 do konečné polohy x_2 . Tato síla vykoná práci (aplikace II. NZ):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} m a dx$$

Dále můžeme upravit:

$$m a dx = m \frac{dv}{dt} dx$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

Po dosazení

$$m a dx = m \frac{dv}{dx} v dx = m v dv.$$

Dále

$$W = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2.$$

Práce sil pružnosti

Síla pružnosti je síla, kterou na částici působí natažená nebo stlačená pružina. Často je vratná síla pružiny $\vec{F}$ přímo úměrná jejímu prodloužení. Platí

$$\vec{F} = -k\vec{d}, \quad (3.8)$$

tzv. Hookův zákon. Znaménko minus znamená, že síla pružiny má vždy opačný směr než posunutí jejího volného konce.

Konstanta k je tzv. tuhost pružiny. Jednotkou tuhosti v soustavě SI je newton na metr ($\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$).

Při vhodné volbě soustavy souřadnic (osa y je zvolena rovnoběžně s pružinou)

$$F = -ky.$$

Práci pružné síly (je proměnná) lze vyjádřit vztahem

$$W = \int_{y_1}^{y_2} F dy = \int_{y_1}^{y_2} (-ky) dy = -\frac{1}{2} k y_1^2 + \frac{1}{2} k y_2^2.$$

Pro $y_1 = 0$ lze vztah přepsat na tvar

$$W = \frac{1}{2} k y^2. \quad (3.9)$$

Práce, kterou vykoná síla při prodloužení pružiny, je rovna potenciální energii pružnosti.

Výkon

Mírou toho, jak rychle koná určitá síla práci, je výkon. Vykoná-li síla $\vec{F}$ práci ΔW za dobu Δt , je její průměrný výkon v daném časovém intervalu definován jako

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (3.10)$$

Limitním případem je okamžitý výkon P , odpovídá okamžité rychlosti konání práce (platí $\Delta t \rightarrow 0$)

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (3.11)$$

Jednotka výkonu: watt, značka W ($W = J \cdot s^{-1}$)

V praxi využíváme vztahu pro výpočet práce pomocí výkonu a času, odkud plyne jednotka kilowatthodina:

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 10^3 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$$

Jiné vyjádření výkonu:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos \alpha dx}{dt} = F \cos \alpha \frac{dx}{dt} = Fv \cos \alpha$$

Pomocí skalárního součinu

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \dots \text{okamžitý výkon} \quad (3.12)$$

Pro $\alpha = 0$ máme $P = Fv$.

Důsledek: Pracuje-li se stálým výkonem P motor automobilu, jehož rychlost se zvětšuje, tažná síla motoru klesá.

Příkon P_0 je veličina charakterizující rychlost, kterou do nějakého stroje nebo zařízení přechází z okolí energie (pohybová energie vody v turbíně, chemická energie paliva ve spalovacím motoru atd.). Příkon může být rovněž rychlost, se kterou koná práci okolí působící na vstupní část nějakého zařízení – např. motor na vstupu do rychlostní skříně automobilu, tj. veličina $P_0 = \Delta W_0 / \Delta t$, kde ΔW_0 je práce vykonaná motorem za dobu Δt .

Účinnost stroje je veličina $\eta = \text{výkon}/\text{příkon} = P/P_0$.

Shrnutí:

Práce stálé síly:

$$W = Fs \cos \alpha$$

Práce sil pružnosti:

$$W = -\frac{1}{2}ky^2$$

Výpočet výkonu:

$$P = Fv$$

Účinnost stroje:

$$\eta = \frac{P}{P_0}$$

Kontrolní otázky

Vyslovte definici práce stálé síly působící na těleso pohybující se jedním směrem po přímce. Uveďte definici a název jednotky práce.

Jak je definován okamžitý a střední výkon?

Jak je definována jednotka kilowatthodina? Z jakého vztahu definice vychází?

Příklad:

Bedna o hmotnosti $m = 50$ kg je vlečena lanem po vodorovné drsné rovině se stálým zrychlením $\vec{a}$, které má stejný směr jako rychlost a velikost $a = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Součinitel smykového tření je $f = 0,1$. Úkoly: 1. Načrtněte obrázek a zakreslete do něj síly, které působí na bednu. 2. Určete a) sílu tření, která působí na bednu, b) sílu $\vec{F}_1$, kterou na bednu působí lano, c) sílu, kterou působí bedna na podložku. 3. Určete práci, kterou na úseku délky $s = 3$ m vykonala a) tíhová síla působící na bednu, b) síla tření, c) síla, kterou na bednu působí lano. 4. Určete výkon, se kterým konala práci síla $\vec{F}_1$ v okamžiku, kdy bedna měla rychlost $v = 0,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení:

2a) $\vec{F}_t$, velikost $F_t = fF_2$, kde $\vec{F}_2 = \vec{F}_G$, $F_t = 49 \text{ N}$, směr $\vec{F}_t \uparrow \downarrow \vec{v}$;

b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_t = m\vec{a}$, $F_1 - F_t = ma = F_1 = m(a + fg) \approx 120 \text{ N}$;

c) Síla působící na podložku $\vec{F}_3 = -\vec{F}_t + \vec{F}_2$, směr $\text{tg } \alpha = F_2/F_t = 10$, $\alpha = 84,3^\circ$, velikost síly $F_3 = \sqrt{F_2^2 + F_t^2} \approx 500 \text{ N}$.

3a) $W_G = F_G s \cos 90^\circ = 0$,

b) $W_t = F_t s \cos 180^\circ = -F_t s \approx -150 \text{ J}$,

c) $W_1 = F_1 s \approx 360 \text{ J}$

4. $P = F_1 v \approx 72 \text{ W}$.

Práce tíhové síly

Zvedneme-li v tíhovém poli těleso, vykonáme kladnou práci, ale těleso nezíská kinetickou energii. Při zvednutí získá těleso energii, která závisí na jeho poloze vzhledem k Zemi, je to tzv. polohová energie. Souvisí-li s tíhovými silami, nazýváme ji polohové energie tíhová, pokud souvisí se silami pružnosti, je to polohová energie elastická. Elektricky nabitá částice má v elektrickém poli potenciální energii elektrickou.

Mějme částici o hmotnosti m , která se pohybuje z bodu A_1 do bodu A_2 po křivce k v tíhovém poli Země. Na částici trvale působí tíhová síla $\vec{F}_G = m\vec{g}$.

(Působí zde další síly, např. odpor vzduchu, vliv ostatních částic). Práce, kterou vykoná síla $\vec{F}_G$, je dána vztahem

$$W_G = mg(h_1 - h_2) \quad (3.13)$$

kde h_1, h_2 jsou výšky bodů A_1 a A_2 nad libovolně zvolenou vodorovnou rovinou H . Polohová energie v tíhovém poli Země je tedy

$$E_p = mgh, \quad (3.14)$$

tzn. že pro $h = 0$ je $E_p = 0$. Rovina H je hladina nulové tíhové energie.

Příklad:

Kámen o hmotnosti 0,4 kg byl vržen šikmo vzhůru ve výšce 12 m nad hladinou rybníka hlubokého 5 m, dopadl na hladinu a klesl ke dnu. Určete práci, kterou přitom vykonala tíhová síla na něj působící.

Řešení:

$$W_G = mg(h + h')$$

$$W_G = 0,4 \cdot 9,81 \cdot (12 + 5) \text{ J} \approx 70 \text{ J}.$$

Pokud práce, kterou síly vykonají během libovolného pohybu tělesa, závisí jen na počáteční a konečné poloze tělesa a nikoli na způsobu jakým se těleso z počáteční do konečné polohy dostalo, je tzv. práce konzervativních sil. Silová pole, která mají uvedenou vlastnost, se nazývají konzervativní (potenciálová) (např. i síly elektrostatického pole). Příslušné síly jsou síly konzervativní.

Potom $E_p = W$.

Práce vykonaná konzervativní silou působící na částici pohybující se po libovolné uzavřené trajektorii je nulová.

Zákon zachování mechanické energie

Mechanická energie E částice je definována jako součet její potenciální energie E_p a kinetické energie E_k :

$$E = E_p + E_k \quad (3.15)$$

Zákon zachování mechanické energie lze zapsat ve tvaru

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0.$$

Celková energie izolované soustavy je stálá.

Uvažujme těleso v izolované soustavě, které má určitou potenciální energii. Toto těleso uvolníme, začne se pohybovat a tím se také začne zmenšovat jeho potenciální energie. Platí

$$-dE_p = Fds = mads = m \frac{dv}{dt} ds,$$

$ds = vdt$ a po dosazení

$$-dE_p = m \frac{dv}{dt} vdt = mv dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Takže $d(E_k + E_p) = 0$, tzn. $E_k + E_p = \text{konst.}$

Zachovávali-li se mechanická energie tělesa (soustavy), můžeme porovnávat součet celkové kinetické a potenciální energie v různých okamžicích, aniž bychom uvažovali o pohybu tělesa (soustavy) v intervalu mezi těmito okamžiky a počítali práci interakčních sil částic soustavy.

Při běžných reakcích (chemických) se zachovává nejen energie, ale i hmotnost. Zdá se, že hmotnost se zachovává odděleně od zachování energie. V roce 1905 Albert Einstein představil rovnici vyjadřující ekvivalenci mezi energií a hmotností $E = mc^2$. Měřitelné jsou tyto změny při jaderných reakcích. Na základě tohoto vztahu je možné si uvědomit energiové ekvivalenty různých předmětů, které jsou ohromující – např. prachová částice o hmotnosti 10^{-13} kg má energiový ekvivalent 10^4 J, těleso o hmotnosti řádově gramy má energiový ekvivalent v 10^{14} J.

Shrnutí

Energie je fyzikální veličina, která charakterizuje formy pohybu hmoty a schopnost tělesa konat práci. Hmotný bod má mechanickou energii, jestliže se vzhledem k určité vztažené soustavě pohybuje (kinetická energie) nebo se nachází v silovém poli jiných těles (potenciální energie). Platí zákon zachování mechanické energie: U všech mechanických dějů se mění potenciální energie v kinetickou a naopak, přičemž celková energie izolované soustavy těles je během celého děje stálá.

Kontrolní otázky

Vyslovte definici kinetické energie.

Vysvětlete pojem pole konzervativních sil.

Jak zní zákon zachování energie?

3 TUHÉ TĚLESO

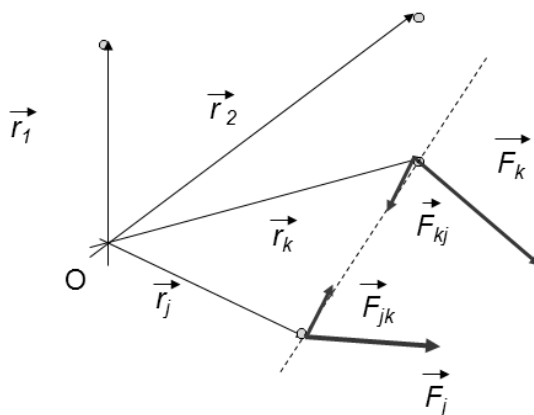
4.1 Hmotný střed soustavy hmotných bodů

Síly působící na soustavu – vnější a vnitřní. Vnější síly mají svůj původ mimo soustavu. Síly vnitřní jsou síly, kterými působí jednotlivé body na sebe navzájem. Výslednice všech vnitřních sil je rovna nule.

Působení vnějších sil na soustavu:

výsledná vnější síla $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$.

Chování soustavy při působení této síly lze popsat pomocí jediného bodu, tzv. hmotný střed.



Obr. 21 Síly působící na soustavu hmotných bodů

Definice

Hmotný střed je fiktivní bod, přiřazený dané soustavě, který má tyto vlastnosti:

- je v něm soustředěna hmotnost celé soustavy,

$$m_T = \sum_{k=1}^n m_k ,$$

- pohybuje se tak, jako kdyby na něj působila výslednice vnějších sil,

- jeho hybnost $\vec{p}_T$ je proto rovna celkové hybnosti soustavy,

$$m_T \vec{v}_T = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k .$$

Výpočet souřadnic hmotného středu

Označení $\vec{r}_T$ = polohový vektor hmotného středu.

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \dots + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} ,$$

stručněji:

$$\vec{r}_T = \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k m_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

Tato vektorová rovnice vyjadřuje tři skalární rovnice

$$x_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad y_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad z_T = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad (4.1)$$

Vlastnosti hmotného středu

Poloha hmotného středu vzhledem k soustavě hmotných bodů nezávisí na volbě vztažného systému.

Jestliže zvolíme počátek vztažného systému (jeho souřadné soustavy) v hmotném středu, potom platí $\vec{r}_T = 0$. V hmotném středu soustavy je soustředěna celková hmotnost soustavy, takže platí také

$$\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_T = 0.$$

Jeho hybnost se rovná vektorovému součtu hybností všech bodů soustavy.

V zemském tíhovém poli je hmotný střed soustavy totožný s působištem tíhové síly a nazývá se těžiště.

Příklad:

Nalezněte bod na spojnici Země – Měsíc, v němž leží hmotný střed této soustavy dvou „hmotných bodů“. Hmotnost Měsíce m_M a hmotnost Země m_Z spolu souvisí vztahem $m_Z = 80m_M$.

Řešení:

Vztažným systémem bude osa x . Počátek souřadnic je ve středu Země. Souřadnice hmotného středu:

$$x_T = \frac{x_Z m_Z + x_M m_M}{m_Z + m_M} = \frac{m_M}{m_Z + m_M} x_M$$

Po dosazení: $x_M = 384\,000$ km, $m_Z = 80m_M$, $x_T = 4\,740$ km. Hmotný střed soustavy Země – Měsíc leží 1 640 km pod ideálním povrchem kulové Země.

4.2 Impulsové věty

Druhý Newtonův zákon platí jen pro jeden hmotný bod. Zobecněním druhého Newtonova zákona na soustavu hmotných bodů odvodíme impulsové věty.

První impulsová věta

Vezmeme nejprve jeden hmotný bod ze soustavy, m_k .

Pro tento bod tedy platí:

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k + \sum_{j=1, j \neq k}^n \vec{F}_{k,j} \quad (4.2)$$

První člen $\vec{F}_k$ je výslednice vnějších sil působících na bod m_k , druhý člen je výslednice vnitřních sil působících na bod m_k .

Takovou rovnici napíšeme pro všechny body

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \sum_{j=1, j \neq k}^n \vec{F}_{1j},$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \sum_{j=1, j \neq k}^n \vec{F}_{2j},$$

dále pro $k = 3, 4, 5, \dots, n$. Všechny tyto rovnice sečteme:

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{j \neq k}^n \vec{F}_{kj}$$

Dvojitý součet má význam výslednice vnitřních sil mezi všemi body soustavy. Tento součet je roven nule.

Levá strana – zaměníme pořadí součtu podle k a derivace podle času.

Pravá strana – zbude jen první člen:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

Označení:

Celková hybnost soustavy hmotných bodů

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k.$$

Výslednice všech vnějších sil působících na soustavu

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Potom platí první impulsová věta

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (4.3)$$

Časová změna celkové hybnosti soustavy je rovna výsledné vnější síle působící na soustavu.

Jiný zápis

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{F}. \quad (4.4)$$

Definice

Soustava, na kterou nepůsobí vnější síla, tzn. soustava, pro kterou platí $\vec{F} = 0$, se nazývá izolovaná.

Důsledky první impulsové věty:

Celková hybnost izolované soustavy hmotných bodů je konstantní. Tato věta vyjadřuje zákon zachování celkové hybnosti izolované soustavy hmotných bodů.

Tím je vyjádřen také zákon zachování celkové energie izolované soustavy hmotných bodů.

Hmotný střed izolované soustavy je buďto v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

Tato věta vyjadřuje zákon pohybu hmotného středu izolované soustavy hmotných bodů.

Zákon zachování hybnosti v případě dvou těles

Mějme dva hmotné body, které na sebe působí dvěma stejnými, ale opačně orientovanými silami $\vec{F}$, $-\vec{F}$. Tyto síly udělují hmotným bodům zrychlení $a_1 = \frac{F}{m_1}$, $a_2 = \frac{-F}{m_2}$. Za čas Δt

dojde ke změně hybnosti obou bodů, a to $\Delta \vec{p}_1 = \vec{F} \Delta t$, $\Delta \vec{p}_2 = (-\vec{F}) \Delta t$.

Celková mechanická energie izolované soustavy hmotných bodů je konstantní. Odtud $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$.

Při vzájemném působení dvou těles je celková změna jejich hybnosti nulová.

Pro počáteční rychlosti v_1 , v_2 a konečné rychlosti v'_1 , v'_2 obou hmotných bodů můžeme rovnici přepsat jako $m_1(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) + m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) = 0$. Odtud $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$ což je zákon zachování hybnosti pro dva hmotné body.

Vztah lze zobecnit pro n hmotných bodů: Je-li $\vec{F} = 0$, potom lze psát $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$, a tedy $\vec{P} = \vec{k}$.

4.3 Odrazy a srážky

Dokonale nepružná srážka dvou těles je taková srážka, při níž se tělesa při srážce spojí a po srážce se pohybují jako celek. Platí, že hybnost soustavy se nezmění

$$\vec{p} = \text{konst.} \quad (4.5)$$

Středový ráz dvou dokonale pružných koulí je takový ráz, při němž se středy koulí před srážkou pohybují po jejich spojnici. Kromě hybnosti soustavy se nemění ani kinetická energie soustavy.

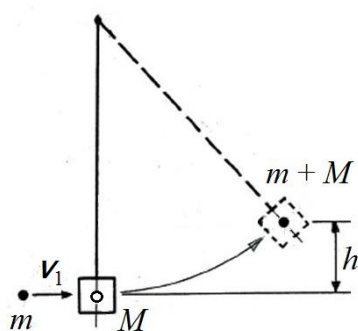
Platí zákon zachování hybnosti

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'. \quad (4.6)$$

Platí zákon zachování energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (4.7)$$

Příklad:



Balistické kyvadlo je krabice naplněná např. pískem a zavěšená na dvojici závěsů. Používá se pro měření rychlosti střel v balistice (měření rychlosti střely v_1).

Řešení:

Bedna s pískem na paralelních závěsech = balistické kyvadlo

Balistické kyvadlo + střela představují izolovanou soustavu dvou „hmotných bodů“.

Obr. 22 Balistické kyvadlo

1. Před vniknutím střely 2. Po vniknutí střely

Střela	Bedna	Střela		Bedna
$v_1 \neq 0$	$v_0 = 0$	v_1	=	$v_0 = v$
$p_1 = mv_1$	$p_0 = 0$	p	=	$(m + M) \cdot v$

Použijeme zákon zachování celkové hybnosti izolované soustavy:

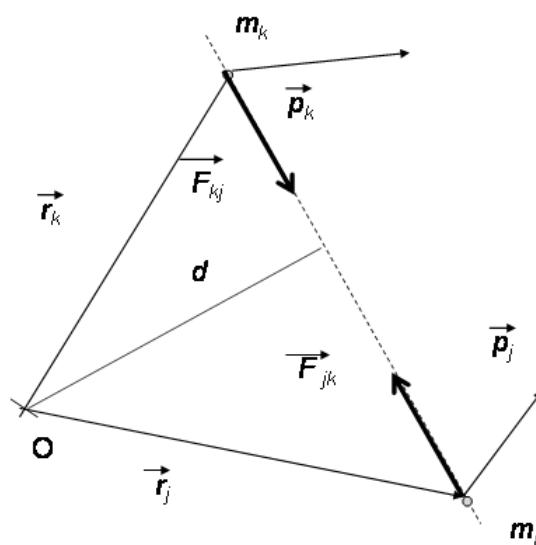
$$m v_1 = (m + M) v$$

Použijeme zákon zachování celkové mechanické energie

$$\frac{1}{2} m^2 v_1^2 / (m + m_0) = (m + m_0) g h,$$

kde g je tíhové zrychlení, h je výška, ve které je $v = 0$.

Druhá impulsová věta



Obr. 23 Soustava hmotných bodů

Mějme soustavu hmotných bodů s hmotnostmi m_k ,

a hybnostmi $\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k$.

Vyjádříme působící síly: $\vec{F}_k + \sum \vec{F}_{jk}$

Moment hybnosti k -tého bodu je definován pomocí vztahu

$$\vec{b}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k.$$

Časová změna momentu hybnosti $\vec{b}_k$ je způsobená momentem síly

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{r}_k \times \sum \vec{F}_{jk}.$$

Vyjádříme-li momenty všech hmotných bodů, bude výsledný moment vnějších sil $\vec{M}$ roven

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k).$$

Dosazením dostaneme tvar druhé impulsové věty

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \vec{b}_k = \vec{M}. \quad (4.8)$$

Slovně tuto větu vyjádříme takto: Časová změna momentu hybnosti soustavy hmotných bodů se rovná výslednému momentu vnějších sil.

Poznámka:

Jedná se o moment hybnosti a moment síly vzhledem k libovolnému pevnému bodu.

Důsledek:

Zákon zachování momentu hybnosti

$$\sum_{k=1}^n \vec{b}_k = \text{konst.} \quad (4.9)$$

Celkový moment hybnosti izolované soustavy vzhledem k libovolnému pevnému bodu je konstantní.

Shrnutí

První impulsová věta:

Časová změna celkové hybnosti soustavy je rovna výsledné vnější síle působící na soustavu.

Druhá impulsová věta:

Časová změna momentu hybnosti soustavy hmotných bodů se rovná výslednému momentu vnějších sil.

Kontrolní otázky

Vyjmenujte základní vlastnosti hmotného středu soustavy hmotných bodů.

Formulujte první impulsovou větu a vysvětlete její význam.

Jak je definována druhá impulsová věta? Jak ji zapíšete matematicky a jak ji vyslovíte?

Literatura

Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001. Mechanika str. 207-227, 238-250.

4 MOMENT SETRVAČNOSTI

Moment setrvačnosti je skalární kvantitativní míra setrvačných vlastností tělesa při otáčivém pohybu. Jeho velikost je ovlivněna rozložením látky v tělese. Pokud je rozložení látky diskrétní (lze najít konečně mnoho bodů o hmotnostech m_k , které se nacházejí ve vzdálenostech r_k od osy otáčení, potom lze moment setrvačnosti vypočítat podle vztahu

$$J = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \quad (5.1)$$

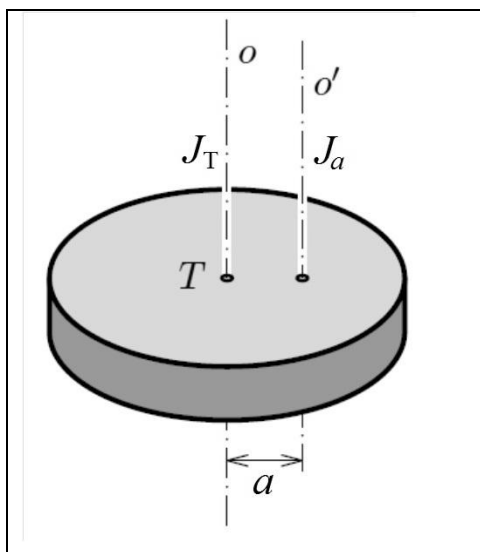
Je-li rozložení látky spojitě, je nutné použít integrálu

$$J = \int_m r^2 dm.$$

Integruje se přes hmotnost m .

Jednotkou momentu setrvačnosti je $[J] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Steinerova věta



Obr. 24 K výkladu Steinerovy věty

Známe-li moment setrvačnosti J_T vzhledem k ose o jdoucí těžištěm tělesa, určíme moment setrvačnosti J_a vzhledem k jiné ose o' , která je rovnoběžná s o a je od ní ve vzdálenosti a .

Steinerovu větu zapíšeme ve tvaru:

$$J_a = J_T + ma^2$$

Příklad 1:

Určete moment setrvačnosti J_R plně homogenní koule o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose, která se dotýká koule na jejím povrchu.

Řešení:

Podle Steinerovy věty ($a = R$) platí $J_R = J_T + mR^2$.

Podle definice vypočteme J_T , máme $J_T = \frac{2}{5}mR^2$.

Výsledek:

$$J_R = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2.$$

5.1 Moment hybnosti

Moment hybnosti k -tého bodu, který rotuje s rychlostí rotace $\vec{\omega}$ vyjádříme pomocí vztahu

$$\vec{b}_k = \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k,$$

kde $\vec{v}_k$ je obvodová rychlost hmotného bodu. Lze ji určit pomocí vztahu $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k$ a je pro každý bod tuhého tělesa jiná. Sloučíme-li oba vztahy, máme pro $\vec{\omega} \perp \vec{r}$

$$\vec{b}_k = m_k r_k^2 \vec{\omega}.$$

Moment hybnosti pro celé těleso získáme jako součet všech jednotlivých momentů hybnosti

$$\vec{b} = \sum_{\text{těleso}} \vec{b}_k.$$

Protože úhlová rychlost je při rotaci kolem pevné osy pro všechny body tělesa stejná, lze ji vytknout před sumu a dostaneme

$$\vec{b} = \vec{\omega} \sum_{\text{těleso}} m_k r_k^2.$$

Výraz za sumou představuje moment setrvačnosti J , takže můžeme psát

$$\vec{b} = J \vec{\omega}. \quad (5.3)$$

Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k dané ose vypočítáme jako součin jeho momentu setrvačnosti a úhlové rychlosti jeho rotačního pohybu.

Uvedený vztah platí pro těleso libovolného tvaru a pro libovolnou osu rotace.

Analogicky k druhému Newtonovu pohybovému zákonu (zákon síly) lze zapsat také pohybovou rovnici pro rotaci tuhého tělesa kolem pevné osy.

Veličinou analogickou k síle $\vec{F}$ je v případě rotace kolem pevné osy moment síly $\vec{M}$, analogií k hybnosti $\vec{p}$ je moment hybnosti $\vec{b}$ a ke zrychlení $\vec{a}$ je úhlové zrychlení $\vec{\varepsilon}$.

Pohybová rovnice má potom tvar

$$\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \vec{\varepsilon}. \quad (6.4)$$

Dále definujeme rotační impuls $\vec{L}$ vztahem

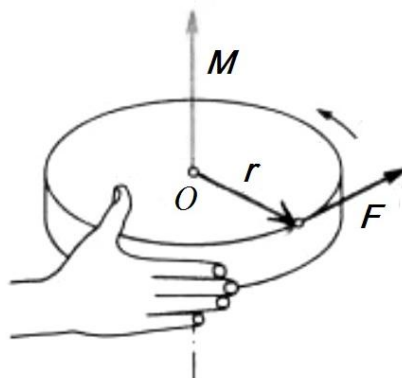
$$\vec{L} = \int_{t_0}^t \vec{M} dt.$$

Vlivem rotačního impulsu dochází ke změně momentu hybnosti tělesa.

Příklad 2:

Na setrvačnick, který má tvar plného homogenního válce o poloměru r a moment setrvačnosti J a který je v klidu, začne v čase $t = 0$ působit tečná síla F , která má konstantní velikost. Určete:

- i) počet otáček setrvačnicku během prvních k sekund,
- ii) oběžnou rychlost bodů na plášti válce setrvačnicku na konci k -té sekundy,
- iii) kinetickou energii válce na konci k -té sekundy,



Obr. 25 Moment síly

Řešení

Moment $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ na obvodu válce je

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Jeho velikost je

$$M = rF \sin \alpha.$$

V našem případě $\alpha = \pi/2$,

$$M = rF.$$

Pohybová rovnice pro rotaci tělesa okolo pevné osy

$$M = J\varepsilon = rF.$$

Úhlové zrychlení $\varepsilon = \frac{rF}{J}$.

Pro úhlovou dráhu platí $\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 = \frac{rF}{2J} k^2 t_0^2$, kde $t_0 = 1$ s.

i) Počet otáček určíme pomocí celkové úhlové dráhy, kterou vydělíme délkou jedné otáčky:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}$$

Po dosazení

$$N = \frac{rFk^2t_0^2}{4\pi J}.$$

ii) Oběžná rychlost pláště válce na konci k -té sekundy:

$$v = r\omega = r\epsilon t = \frac{r^2 F k t_0}{J}$$

iii) Kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} J (\epsilon t)^2 = \frac{1}{2} J \left(\frac{r F k t_0}{J} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{r^2 F^2 k^2 t_0^2}{J} = \frac{F^2 k^2 t_0^2}{m r^2}$$

Shrnutí

Zákon zachování momentu hybnosti tuhého tělesa: Jestliže na tuhé těleso nepůsobí vnější moment síly ($\vec{M} = 0$), pak jeho moment hybnosti je konstantní.

Moment setrvačnosti je definován vztahem

$$J = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Steinerovu větu zapíšeme ve tvaru

$$J_a = J_T + m a^2.$$

Platí zákon zachování momentu hybnosti tuhého tělesa: Jestliže na tuhé těleso nepůsobí vnější moment síly ($\vec{M} = 0$), pak jeho moment hybnosti je konstantní. Pohybová rovnice má tvar

$$\vec{M} = J \vec{\omega}. \quad (5.5)$$

Pozn. Setrvačníky se ve strojní praxi používají k akumulaci (nahromadění a udržení) kinetické energie. Síly, kterými působí např. v motoru na ostatní části, konají střídavě kladnou a zápornou práci, takže setrvačnick motoru střídavě dodává a odebírá energii a vyhlazuje jeho chod. Kinetickou energii setrvačnicků lze užít např. i k pohonu lodí. Mohutný rychle rotující setrvačnick má velkou energii.

Kontrolní otázky

Jak vypočítáme moment setrvačnosti?

Vysvětlete, co je to Steinerova věta.

Definujte moment hybnosti tuhého tělesa.

Zapište pohybovou rovnici pro tuhé těleso.

Tabulka 1 : Momenty setrvačnosti vybraných homogenních těles o hmotnosti m

Těleso	Osa	Moment setrvačnosti
Tenká tyč libovolného průřezu délky l	Kolmá k tyči na jejím konci	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Tenká tyč libovolného průřezu délky l	Kolmá k tyči v jejím středu	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Dutý válec, poloměry r_1, r_2 , výška v	Osa válce	$J = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$
Tenký prstenec, obruč poloměru r	Středem, kolmo k rovině prstence	$J = mr^2$
Tenký prstenec, obruč poloměru r	Libovolný průměr	$J = \frac{1}{2}mr^2$
Tenký prstenec, obruč poloměru r	Libovolná tečna	$J = \frac{3}{2}mr^2$
Plný válec, poloměr r , výška v	Osa válce	$J = \frac{1}{2}mr^2$
Plná koule poloměru r	Libovolný průměr	$J = \frac{2}{5}mr^2$
Tenkostěnná kulová skořápka	Libovolný průměr	$J = \frac{2}{3}mr^2$
Pravoúhlý rovnoběžnostěn (kvádr)	Jdoucí středem	$J = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

Tabulka 2: Srovnání pohybu posuvného a otáčivého

Pohyb posuvný	Pohyb otáčivý kolem pevné osy
Dráha, délka dráhy $s = vt$	Úhel otočení $\varphi = \omega t$
Zrychlení $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	Zrychlení úhlové $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Hmotnost setrvačná m	Moment setrvačnosti $J = \sum m_k r_k^2 = \int r^2 dm$
Síla $\vec{F}$	Moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Pohybová rovnice	
Druhý pohybový zákon $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$	Pohybový zákon pro otáčení $\vec{M} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}$ $\vec{M} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon}$
Hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$	Moment hybnosti $\vec{b} = J\vec{\omega}$
Impuls síly $\vec{I} = \vec{F}dt$	Rotační impuls $\vec{L} = \vec{M}dt$
Práce $W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Práce $W = \int_1^2 \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
Výkon $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	Výkon $P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
První věta impulsová $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$	Druhá věta impulsová $\frac{d\vec{b}}{dt} = \sum \vec{M}_i = \vec{M}$
Potenciální energie $\Delta E_p = -\int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$	
Zákon zachování hybnosti $\vec{p} = \vec{k}$ při $\sum \vec{F}_i = \vec{F} = \vec{0}$	Zákon zachování momentu hybnosti $\vec{b} = \vec{k}$ při $\sum \vec{M}_i = \vec{M} = \vec{0}$

Literatura:

Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J. : Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001. Mechanika str. 264 – 284, 297 - 317

http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_Fyzika/1_6_Teleso.pdf

5 PRUŽNOST A PEVNOST

Pevné těleso – existují jen pružné deformace (přestanou-li působit vnější síly, deformace vymizí).

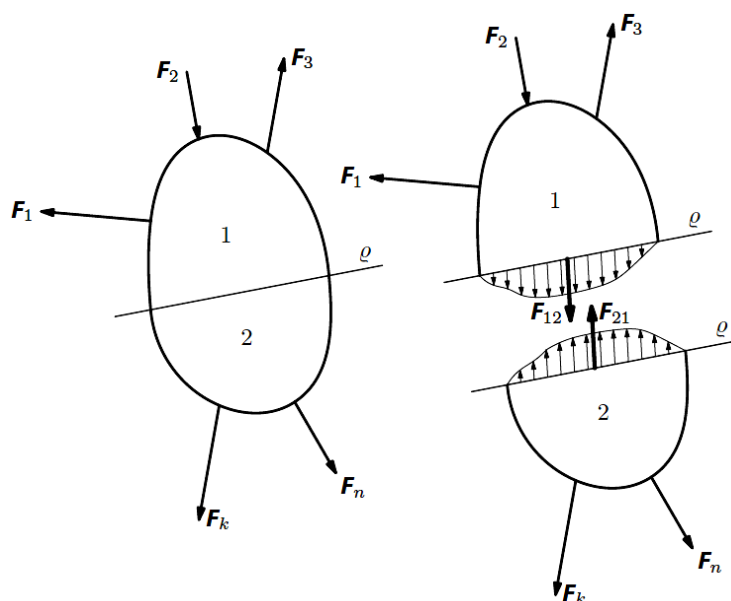
Reálné těleso – existence plastické deformace, ke které dochází při překročení napětí pružné deformace.

Vlastnosti reálného tělesa jsou závislé na jeho vnitřní struktuře. Krystalické látky se vyskytují buď jako monokrystaly (jsou anizotropní) nebo polykrystaly (velké množství malých krystalů uspořádaných nahodile). U polykrystalických látek fyzikální vlastnosti nezávisí na směru, jsou izotropní. Izotropní jsou také látky amorfní (vosk, sklo, polymery). V případě deformací považujeme pevné látky za pružné kontinuum.

Fyzikální vlastnosti popisujeme obecně spojitými funkcemi místa v tělese. Mluvíme o tzv. materiálových konstantách. V případě izotropních látek se jedná o Youngův modul pružnosti E a modul pružnosti ve smyku G .

Napětí a deformace

U tělesa hovoříme o vnějších a vnitřních silách. Vnitřní síly zprostředkovávají působení sil vnějších. Vnější síly: a) objemové (síla tíhová, síly setrvačné), plošné (tlaková síla), vazbové (momenty sil v místě vazby tělesa na okolí). Pokud je výslednice všech vnějších sil nulová, těleso je ve statické rovnováze.



Obr. 26 Znáznornění vnějších a vnitřních sil

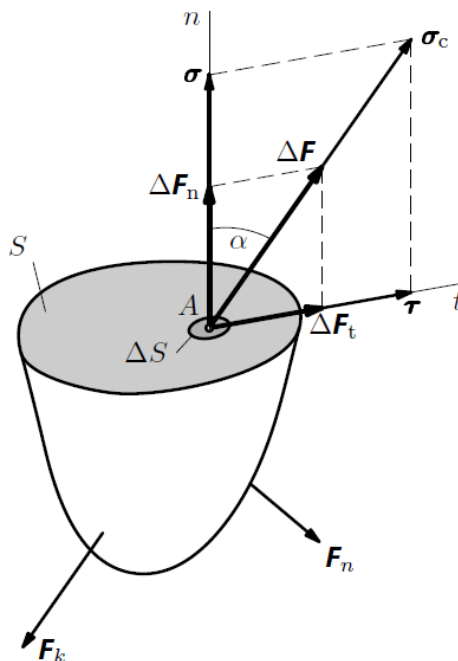
Vnitřní síly si lze představit jako reakci na vnější síly, které se snaží narušit strukturu pevné látky. Vnitřní síly lze určit pomocí metody myšleného řezu (více ve Vybíral: Mechanika pružného tělesa. Studijní texty FO).

Mechanické napětí (určuje rozložení vnitřních sil na ploše řezu)

$$\vec{\sigma}_c = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}, \quad (6.1)$$

kde $\Delta \vec{F}$ je vnitřní síla, ΔS je elementární ploška v okolí bodu A.

Jednotka napětí je $\text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{m}^{-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} = \text{Pa}$ (pascal).



Obr. 27 Mechanické napětí

Složky napětí:

Normálové napětí (ve směru normály k rovině myšleného řezu) σ , tzv. tahové napětí v případě, že směr je souhlasný se směrem vnější normály), tlakové napětí v případě směru opačného

Tečné napětí τ – leží v rovině řezu, vyvolává smykovou deformaci, tzv. smykové napětí.

Výpočet složek napětí:

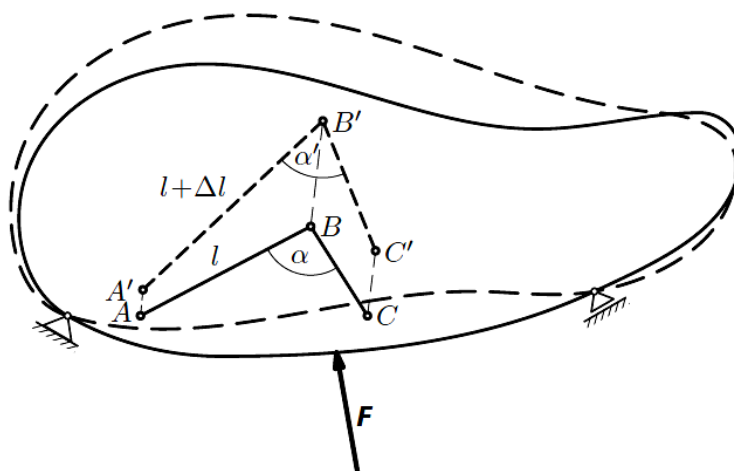
$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS} = \frac{dF}{dS} \cos \alpha = \sigma_c \cos \alpha \quad (6.2)$$

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta S} = \frac{dF_t}{dS} = \frac{dF}{dS} \sin \alpha = \sigma_c \sin \alpha \quad (6.3)$$

Celkové napětí závisí jednak na směru normály vzhledem k ploše ΔS a na vektoru vnitřních sil $\Delta \vec{F}$ vzhledem k této ploše. Je to tenzorová veličina. Tenzor napětí má v trojrozměrném prostoru 9 složek:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Prvky na hlavní diagonále odpovídají normálovému napětí ve směru osy x, y, z , zbývající jsou tečná napětí v jednotlivých rovinách yz, xy, xz .



Obr. 28 Deformace tělesa

Deformace – body A, B, C přejdou při deformaci do bodů A', B', C' . Tyto body jsou krajními body orientovaných vektorů, tzv. vektorů přemístění. Rozložíme je na přemístění lineární, tzv. posunutí, a přemístění úhlové, tzv. pootočení. V případě torze se jedná o úhel zkroucení. Definujeme relativní prodloužení vztahem

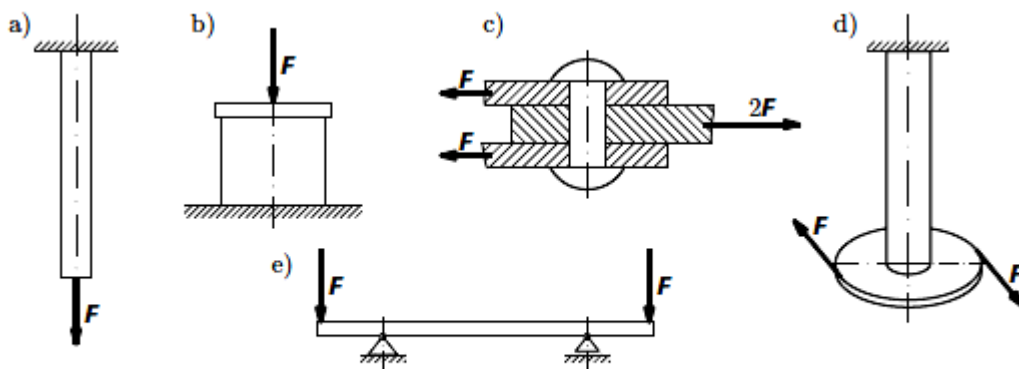
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (6.4)$$

Je-li $\varepsilon < 0$, jedná se o zkrácení.

Je definován tzv. **zkos** – podle obrázku $\gamma = \pi/2 - \alpha'$.

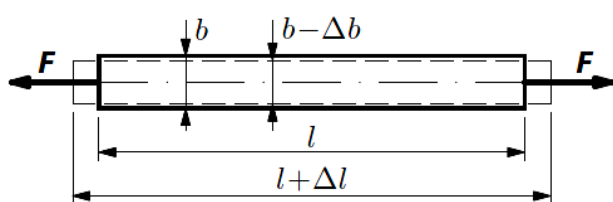
Přehled základních deformací (viz obr. 29).

1. tah (tahová deformace) a tlak (tlaková deformace) – napínání prutů, lan, sloupů, řetězů,
2. smyk (smyková deformace) – v případě namáhání šroubů, svárů, nýtů,
3. torze (krut) – namáhání pružin, torzních vláken,
4. ohyb – příkladem je zatížení nosníků, překladů, nosníků u mostů, balkonů atd.



Obr. 29 Znáznornění deformací a) tah, b) tlak, c) smyk, d) torze, e) ohyb

Hookův zákon



Obr. 30 Hookův zákon

Působí-li na tyč délky l vnější síla $\vec{F}$, prodlouží se tyč o Δl . Prodloužení Δl lze určit na základě vztahu

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{\sigma}{E}l, \quad (6.5)$$

kde l je délka tyče, S je příčný průřez tyče, E je Youngův modul pružnosti (modul pružnosti v tahu), σ je normálové napětí.

Využijeme-li vztahu pro výpočet relativního prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, lze Hookův zákon psát v obecnějším tvaru

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.6)$$

Fyzikální význam Youngova modulu pružnosti – modul má význam napětí, které by vzniklo v tyči při $\varepsilon = 1$, tzn. že $\Delta l = l$.

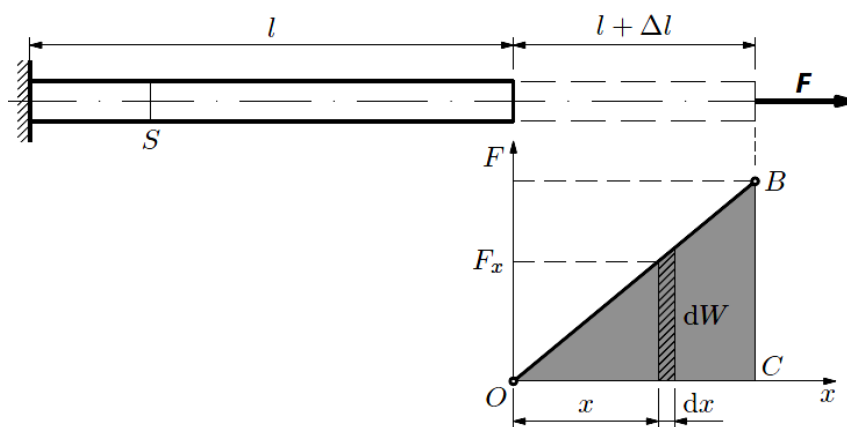
Tah – deformační energie

Práci konají vnější síly, těleso zvětší svou potenciální energii. Necht' stav před deformací je určen jako $x = 0$, stav s deformací $x = \Delta l$. Vnější síla je dána jako $F_x = ES \frac{x}{l}$, práci lze potom při protažení o dx vyjádřit jako

$$dW = F_x dx = \frac{ESx}{l} dx.$$

Celková deformační práce, uvažujeme-li protažení Δl

$$W = \frac{ES}{l} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{ES}{2l} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} F \Delta l = \frac{F^2 l}{2ES}. \quad (6.7)$$



Obr. 31 Pracovní diagram při tahu

Pružnost v torzi

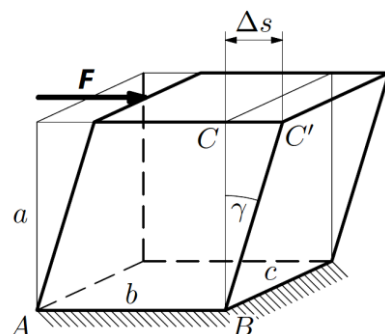
Na těleso působí v rovině kolmé k jeho ose dvojice sil. Válec má výšku l , poloměr r a je na horním konci upevněn. Na dolním konci působí silová dvojice D . Spodní podstava se zkroutí o úhel φ , ostatní jednotlivé vodorovné vrstvy se po sobě smýkají a stáčí se. Úhel φ je tzv. *úhel zkroucení*. Moment dvojice vnějších sil je tzv. *kroutící moment*.

Tečné napětí dané tečnou silou, dává vznik momentu síly M , který lze určit pomocí vztahu $M = \frac{\pi r^4}{2l} \varphi$. Moment M je stejně velký jako moment dvojice D , který způsobuje zkrut, proto pro úhel torze lze psát

$$\varphi = \frac{1}{G} \frac{2}{\pi r^4} D. \quad (6.8)$$

Úhel torze je přímo úměrný délce válce, momentu dvojice D stáčejících sil, nepřímo úměrný čtvrté mocnině poloměru válce. Uvedený vztah umožňuje určit modul pružnosti ve smyku G statickou metodou.

Modul pružnosti ve smyku je roven takovému tečnému napětí, které způsobí zkos 45° .



Obr. 32 Deformace smykem

Z obrázku $\frac{\Delta s}{a} = \tan \gamma \approx \gamma$, tečné napětí $\tau = \frac{F}{S}$. Odtud plyne Hookův zákon pro smyk ve tvaru

$$\tau = G\gamma. \quad (6.9)$$

Pružnost v ohybu

Tyč délky l je jedním koncem upevněna a na druhém konci je zatížena silou $\vec{F}$. Vlivem působící síly se tyč deformuje. Pohybová rovnice ohybové čáry je zapsána jako

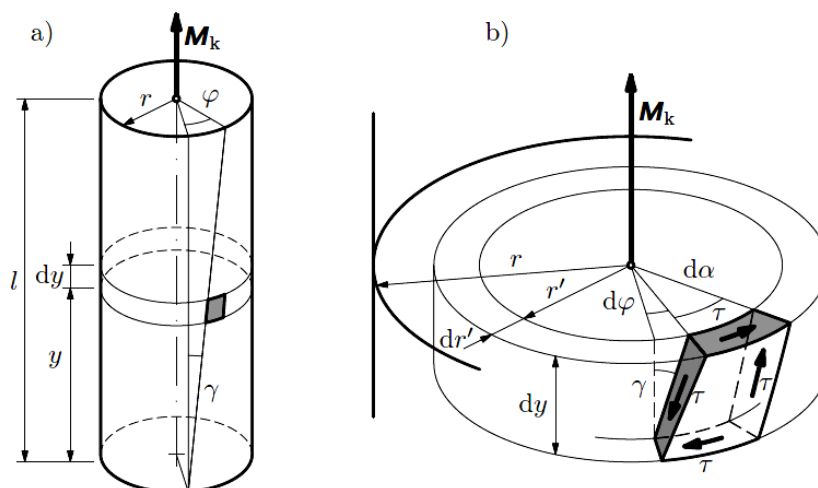
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EJ} D,$$

kde E je modul pružnosti v tahu, D je ohybový moment setrvačnosti, J je osový moment setrvačnosti. Řešením této rovnice dostáváme rovnici pro maximální výchylku

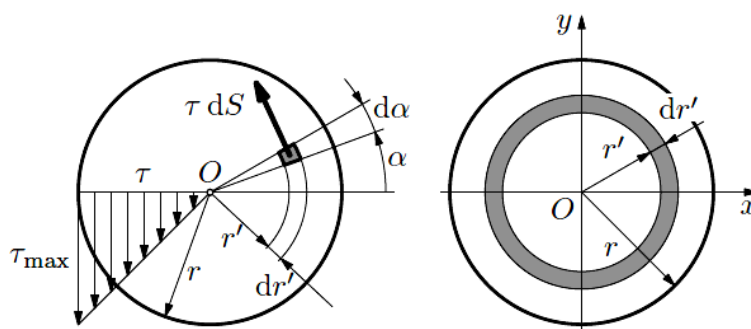
$$y_{\max} = \frac{4}{E} \frac{3}{a^3 b} F. \quad (6.10)$$

Pro ohyb tyče kruhového průřezu o poloměru r

$$y_{\max} = \frac{4}{E} \frac{l^3}{3r^4} F. \quad (6.11)$$



Obr. 33 Deformace při torzi



Obr. 34 Napětí při torzi

Kontrolní otázky

1. Uveďte základní typy deformací.
2. Formulujte Hookův zákon.
3. Co je Youngův modul pružnosti?

Literatura

http://studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_Fyzika/1_6Teleso.pdf

Vybíral, B.: Mechanika pružného tělesa. Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku. (dostupné on line na stránkách FO).

6 GRAVITAČNÍ POLE

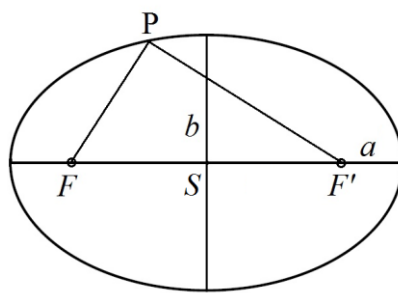
Gravitační pole zprostředkovává silové působení Země na tělesa v jejím okolí pomocí gravitační síly. Zdrojem gravitačního pole jsou všechny hmotné objekty. Každé hmotné těleso přitahuje jiné těleso, tento jev je tzv. gravitace.

Newtonův gravitační zákon popisující vzájemné působení těles byl odvozen na základě Keplerových zákonů. Z Newtonova gravitačního zákona lze Keplerovy zákony odvodit teoreticky.

7.1 Keplerovy zákony

Keplerovy zákony popisují pohyb planet jen z hlediska kinematiky.

První Keplerův zákon popisuje tvar trajektorie.



Obr. 35 První Keplerův zákon

Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce. Odlišnost eliptické dráhy planety od kružnice vyjadřuje tzv. číselná výstřednost e

$$e = \frac{SF}{a}. \quad (7.1)$$

Např. výstřednost Země $e = 0,0167$.

Vzdálenost bodu, kde je planeta nejbližší Slunci, se nazývá perihélium neboli přísluní. Vzdálenost bodu, kde je planeta nejdále od Slunce, se nazývá afélium neboli odsluní.

Obecně lze 1. Keplerův zákon formulovat takto: Částice se pod vlivem centrální síly pohybuje po kuželosečce (kružnici, elipse, parabole, hyperbole), která má ohnisko v centru síly.

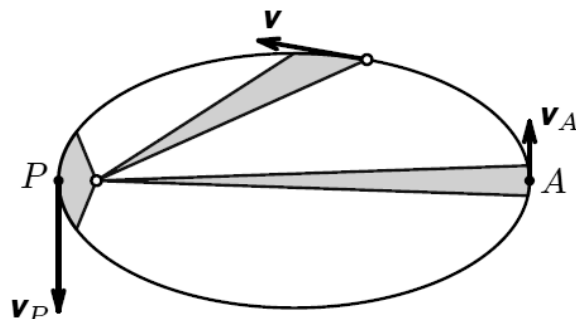
Druhý Keplerův zákon vysvětluje, jak se planety pohybují.

Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.

Průvodičem je úsečka spojující střed planety se středem Slunce. Délka průvodiče se mění, v perihéliu je nejkratší, v aféliu nejdelší, obsah, který opíše, je však stejný. Důsledkem je to,

že rychlost $\vec{v}_P$ planety v perihéliu je větší než rychlost $\vec{v}_A$ v aféliu, pohyb planety je nerovnoměrný.

Obsah zvýrazněné části elipsy lze určit jako plochu opsanou průvodičem r za čas Δt .



Obr. 36 K výkladu plošné rychlosti

Analogicky lze 2. Keplerův zákon vyjádřit takto: Velikost plošné rychlosti planety je konstantní.

Má-li těleso polohový vektor $\vec{r}$, pak se tento vektor při pohybu změní za čas dt na vektor $\vec{r} + d\vec{r}$, kde přírůstek vektoru má směr tečny k trajektorii planety. Obsah plochy opsané průvodičem lze vyjádřit jako $dS = \left| \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r}) \right|$. Velikost plošné rychlosti je dána vztahem

$$w = \frac{dS}{dt} = \left| \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \right|.$$

Vektor plošné rychlosti $\vec{w} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v}$ je kolmý k rovině trajektorie tělesa.

Pokud budeme dále uvažovat moment hybnosti jako $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, kde $\vec{p} = m\vec{v}$, po dosazení plošné hybnosti máme $\vec{L} = 2m\vec{w}$.

Je-li plošná rychlost konstantní, je konstantní také moment hybnosti tělesa. Tento závěr můžeme formulovat i tak, že ze zákona zachování momentu hybnosti vyplývá, že plošná rychlost tělesa je konstantní (tj. znění 2. Keplerova zákona).

S tímto vztahem můžeme pracovat i dále. Derivujme výraz podle času pro stanovení plošného zrychlení

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right) = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{a}),$$

protože $\frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \right) = 0$.

Protože je plošná rychlost stálá, derivace konstanty je nula a tedy plošné zrychlení musí být nulové, tj. $\vec{r} \times \vec{a} = 0$. Z pravidla o počítání s vektory tedy platí, že buď je jeden z těchto dvou vektorů nulový nebo leží v jedné přímce. V našem případě není $\vec{r}$ nulové a ani $\vec{a}$ není rovno nule, proto oba vektory mají stejný směr (zrychlení a tedy i odpovídající síla leží ve směru průvodiče $\vec{r}$). Trajektorie je zakřivená, zrychlení směřuje dovnitř uzavřené dráhy (jinak by pohyb planet nebyl po uzavřených drahách). Odtud plyne, že pohyb způsobený těmito silami je centrální.

Třetí Keplerův zákon vyjadřuje vztah mezi oběhovými dobami a hlavními poloosami jejich trajektorií:

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (7.2)$$

Zákon platí pouze pokud hmotnost obou planet je zanedbatelná vůči Slunci.

Odvození zákona vychází z porovnání síly gravitační a odstředivé (dráhy planet jsou málo odlišné od kružnic). Tedy

$$F_g = F_o \Rightarrow \kappa \frac{M_s m_p}{r^2} = \frac{m_p \cdot v^2}{r}$$

$$v^2 = \kappa \frac{M_s}{r} = \frac{R_g}{2r} c^2,$$

kde $R_g = \frac{2\kappa M_s}{c^2}$ je tzv. *Schwarzschildův poloměr*.

Z těchto vztahů vyplývá, že čím blíže je planeta ke Slunci, tím větší je její oběžná rychlost. Protože $vT = s = 2\pi R$, máme po dosazení

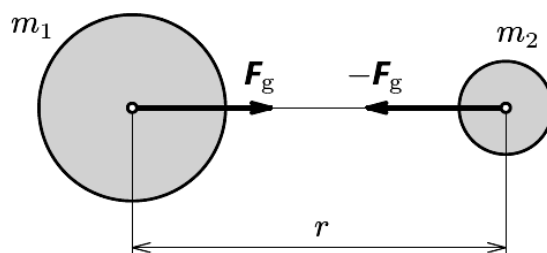
$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa M_s} = \left(\frac{8\pi^2}{R_g c^2} \right) r^3,$$

což je také vyjádření 3. Keplerova zákona.

Platnost Keplerových zákonů není omezena jen na planety, ale platí více či méně přesně pro trajektorie všech těles, která se pohybují v radiálním gravitačním poli ústředního tělesa s hmotností mnohokrát větší než je hmotnost obíhajícího tělesa (např. družice a měsíce planet).

7.2 Newtonův gravitační zákon

Isaac Newton (17. stol.) – vyslovil revoluční myšlenku, že příčinou pohybu těles ve vesmíru je gravitační síla.



Obr. 37 Gravitační silové působení

Každá dvě tělesa se navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami F_g a $-F_g$ opačného směru. Velikost gravitační síly F_g pro stejnorodá tělesa tvaru koule je přímo úměrná součinu jejich hmotností m_1, m_2 a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti r jejich středů:

$$F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (7.3)$$

Konstanta úměrnosti κ se nazývá gravitační konstanta, $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Tento tvar zákona můžeme použít i pro nestejnorodá tělesa jiných tvarů než koule, pokud jejich rozměry můžeme zanedbat vzhledem k jejich vzdálenosti tzn. považujeme je za hmotné body.

K odvození Newtonova gravitačního zákona z Keplerových zákonů:

Bylo odvozeno, že plošné zrychlení planety je nulové $\frac{1}{2}(\bar{r} \times \bar{a}) = 0$. Odtud plyne, že vektorový součin v závorce musí být nulový. Jak již bylo řečeno, při křivočarém pohybu není ani jeden z těchto vektorů nulový, proto zrychlení i polohový vektor leží v jedné přímce. Jedná se o pole centrální a gravitační síla, jejíž vyjádření hledáme, musí být funkcí vzdálenosti od centra tohoto pole. Uvědomíme-li si základní zákonitosti pohybu po kružnici, potom centrum tohoto pole musí ležet ve středu křivosti trajektorie. Radiální zrychlení je tudíž totožné s dostředivým zrychlením a můžeme je určit pomocí známého vztahu

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r,$$

kde T je perioda, tj. doba oběhu planety.

Zapišeme-li 3. Keplerův zákon jednoduše jako $T^2 = Kr^3$, kde K je konstanta, potom lze výraz pro zrychlení upravit na tvar

$$a = \frac{4\pi^2 r}{Kr^3} = k \frac{1}{r^2}.$$

Konstanta k platí obecně pro všechny planety. Vyjádříme-li nyní sílu jako

$$F = ma = k \frac{m}{r^2},$$

kde m je hmotnost planety, potom tato planeta podle 3. Newtonova zákona působí na Slunce silou $F' = k' \frac{M}{r^2}$, kde M je hmotnost Slunce.

Porovnáme-li obě síly, platí $|F| = |F'|$, tj. $km = k'M$. Nyní stačí položit $\kappa = \frac{k}{M} = \frac{k'}{m} = \text{konst.}$ a dostaneme Newtonův gravitační zákon ve tvaru, jako bývá uváděn

$$F = \kappa \frac{mM}{r^2}.$$

7.3 Intenzita gravitačního pole

V okolí každého tělesa existuje gravitační pole, které působí na jiná tělesa. Pro porovnání silového působení v různých místech gravitačního pole je zavedena veličina intenzita gravitačního pole.

Velikost intenzity gravitačního pole K v daném místě pole definujeme jako podíl velikosti gravitační síly F_g , která v tomto místě na hmotný bod působí, a hmotnosti m tohoto bodu. Tedy

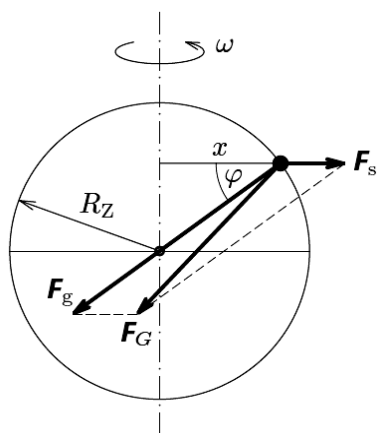
$$K = \frac{F_g}{m}. \quad (7.4)$$

Intenzita gravitačního pole $\vec{K}$ je vektorová veličina stejného směru jako gravitační síla $\vec{F}_{rg}$, která působí v daném místě na hmotný bod. $[K] = \text{N} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Velikost intenzity gravitačního pole K v daném místě pole určíme ze vztahu pro velikost gravitační síly vyjádřenou v gravitačním zákonu.

Intenzita gravitačního pole v daném místě pole se rovná gravitačnímu zrychlení, které v tomto místě uděluje tělesu gravitační síla:

$$K = a_g \quad (7.5)$$



Obr. 38 Tíhová síla

Na všechna tělesa, která leží při povrchu Země a neleží na ose otáčení Země, působí kromě gravitační síly F_g také setrvačná odstředivá síla F_s směřující do středu Země. Výslednice sil je tíhová síla

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_s.$$

Prostor při povrchu Země, kde se projevují účinky tíhové síly, se nazývá tíhové pole. Tíhová síla nemá ve všech místech zemského povrchu stejnou velikost. To je dáno nestejnou velikostí setrvačné síly

$$F_s = m\omega^2 x = m\omega^2 R_Z \cos \varphi.$$

V oblasti rovníku je setrvačná síla největší a tíhová síla nejmenší. Na pólech je to naopak (setrvačná síla je nulová). Změnou tíhové síly se mění i tíhové zrychlení. Dohodou bylo stanoveno normální tíhové zrychlení

$$g_n = 9,806\,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

V blízkosti Země mluvíme o homogenním tíhovém poli.

Tíhová síla a tíha tělesa jsou tedy fyzikálně různé veličiny, které však obě mají svůj původ v tíhovém poli.

Liší se svým působištem. Tíha tělesa vyjadřuje působení tělesa umístěného v tíhovém poli Země na jiná tělesa. Projevuje se jako tlaková síla na podložku nebo jako tahová síla na závěs.

Těleso je ve stavu tíže pokud se projevuje účinek tíhy na jiná tělesa. Pokud tyto účinky vymizí těleso je v beztížném stavu.

Vektor intenzity gravitačního pole vždy směřuje do středu tělesa o hmotnosti M . Takové pole je centrální gravitační pole a střed tělesa gravitační střed centrálního pole.

Velikost intenzity gravitačního pole ve výšce h nad zemským povrchem je

$$K_h = \frac{\kappa M_z}{(R_z + h)^2}. \quad (7.6)$$

Pro $h = 0$

$$K_0 = \frac{\kappa M_z}{R_z^2},$$

kde M_z je hmotnost Země ($5,98 \cdot 10^{24}$ kg), R_z poloměr Země ($6,37 \cdot 10^6$ m).

Velikost intenzity se s rostoucí výškou nad povrchem Země zmenšuje. Když sledujeme gravitační pole Země na malých plochách, např. na ploše o rozměrech několika set metrů, lze gravitační pole považovat za homogenní. Intenzita v homogenním gravitačním poli je konstantní.

Centrální gravitační pole je prostorově neohraničené.

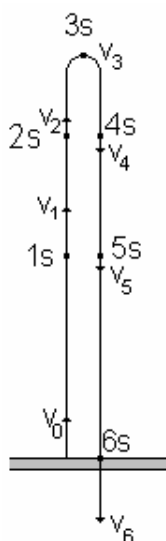
Gravitační pole, které má ve všech místech intenzitu K konstantní se nazývá homogenní gravitační pole. Grafem závislosti intenzity gravitačního pole na vzdálenosti je hyperbola.

7. 4 Pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země

Jde o pohyb těles, jejichž trajektorie jsou vůči rozměrům Země tak malé, že tíhové pole, ve kterém se pohybují, můžeme považovat za homogenní. Uvažujeme, že na tělesa nepůsobí žádné jiné síly než tíhová síla. Pohyb se studuje v soustavě spojené s povrchem Země. Nejjednodušším pohybem v homogenním tíhovém poli Země je volný pád a spolu s nenulovou počáteční rychlostí tvoří vrh tělesa.

Podle směru počáteční rychlosti v_0 rozlišujeme svislý vrh vzhůru, vodorovný vrh a šikmý vrh.

Svislý vrh vzhůru



Je to složený pohyb – rovnoměrný pohyb ve směru svisle vzhůru a volný pád.

Tento pohyb těleso koná, když je vrženo počáteční rychlostí v_0 opačným směrem než je směr tíhového zrychlení.

Pohyb tělesa vzhůru je pohyb rovnoměrně zpomalený.

Rychlost klesá až na vrcholu trajektorie je nulová, poté se těleso vrací volným pádem k Zemi.

Rychlost v čase t stoupání:

$$v = v_0 - gt$$

Výška v čase t stoupání:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Obr. 39 Svislý vrh vzhůru

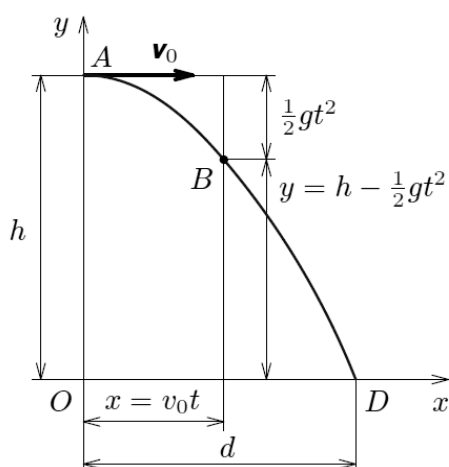
Největší výška, kterou těleso dosáhne, se nazývá výška vrhu h . V ní je rychlost tělesa nulová a tomu odpovídá doba výstupu

$$t_h = \frac{v_0}{g} \quad (7.9)$$

a výška vrhu

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (7.10)$$

Vodorovný vrh



Obr. 40 Vodorovný vrh

Je to složený pohyb, skládá se z pohybu vodorovným směrem a volného pádu. Koná jej těleso, kterému udělíme počáteční rychlost v_0 vodorovným směrem.

Trajektorie je část paraboly s vrcholem v místě hodu. Pokud tuto parabolu zakreslíme do systému souřadnic s vrcholem v bodech $x = 0$; $y = h$, tak pro bod B , v němž se těleso ocitne za dobu t , určíme souřadnice:

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} gt^2$$

Největší vzdálenost od místa vrhu se nazývá délka vrhu d (bod D , kdy $x = d$, $y = 0$):

$$d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Délka vrhu závisí na počáteční rychlosti v_0 a výšce h .

Šikmý vrh vzhůru

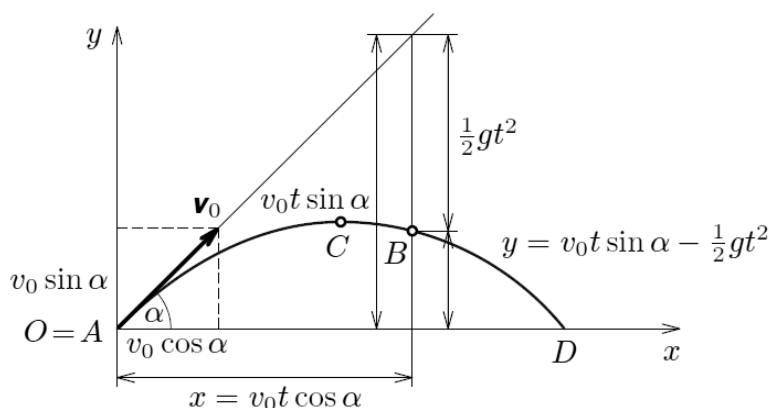
Pohyb složený z pohybu šikmo vzhůru a volného pádu. Počáteční rychlost v_0 má směr, který s vodorovným směrem svírá úhel α , tento úhel se nazývá elevační úhel. Trajektorie je parabola (pouze ve vakuu nebo při zanedbání odporu prostředí), jejíž vrchol je nejvyšší bod trajektorie. Ve vzduchu těleso opisuje tzv. balistickou křivku (způsobeno odporem vzduchu).

Po zakreslení paraboly do systému souřadnic zjistíme, že pro libovolný bod trajektorie platí:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Délka vrhu

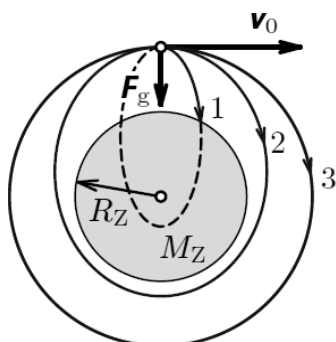
$$x = d \text{ a } y = 0 \rightarrow v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$



Obr. 41 Vrh šikmý

Nejdále dopadne těleso při elevačním úhlu 45° , délka vrhu ve vojenské terminologii je tzv. dostřel.

7.5 Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země



Obr. 42 Pohyby v centrálním gravitačním poli Země

Při pohybech raket, střel a družic nelze gravitační pole Země považovat za homogenní.

Při malé počáteční rychlosti v_0 ve vzdálenosti h od povrchu Země, kde je odpor vzduchu zanedbatelný, opisuje těleso část elipsy (trajektorie 1), délka trajektorie je závislá na počáteční rychlosti.

Při velkých rychlostech se může stát, že těleso nespadne a opíše celou elipsu (trajektorie 2)

Při určité rychlosti tzv. kruhové rychlosti v_k těleso opisuje elipsu se středem ve středu Země (trajektorie 3). Kruhová rychlost je důležitá hlavně pro umělé družice.

Kruhová rychlost

– gravitační síla F_g je rovna dostředivé síle F_d a po vyjádření vztahů dostáváme pro výpočet této rychlosti výraz:

$$\begin{aligned}F_g &= \kappa \frac{mM_Z}{(R_Z + h)^2} \\F_d &= \frac{mv_k^2}{R_Z + h} \\F_g = F_d &\Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z + h}}\end{aligned}\quad (7.13)$$

a vztah pro zrychlení ($h = 0$)

$$a_g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}.$$

Dosadíme-li do vztahu pro rychlost známé hodnoty, dostaneme hodnotu rychlosti $v_k = 7,90 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ – tato hodnota kruhové rychlosti se nazývá *první kosmická rychlost*, pro tuto rychlost je doba oběhu:

$$T = \frac{2\pi R_Z}{v_k} = 5\,064 \text{ s} = 84,8 \text{ min}$$

Při počáteční rychlosti málo větší než kruhová rychlost těleso opisuje opět elipsovitou dráhu. Vzdálenost bodu, kde je družice nejbližší středu Země, od středu Země se nazývá perigeum. Vzdálenost bodu, kde je družice nejdále středu Země, od středu Země se nazývá apogeum.

Při počáteční rychlosti $v_0 = v_k \sqrt{2}$ se trajektorie mění v část paraboly a těleso se trvale vzdaluje od Země. Tato rychlost se nazývá parabolická nebo-li úniková rychlost.

Pro $v_k = 7,90 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je $v_0 = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, což je *druhá kosmická rychlost*.

Když těleso unikne z oblasti, kde převládá gravitace Země, stává se družicí Slunce.

Otázky k opakování

Co je zdrojem gravitačního pole?

Jakými veličinami popíšeme gravitační pole?

Které druhy vrhů znáte?

Jak vypočítáte výšku letu a dálku doletu při šikmém vrhu?

Popište pohyb družic v případech 1. a 2. kosmické rychlosti.

Literatura

Halliday, D. – Resnick, R. – Walker, J.: Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001.

<http://kojot.gfxs.cz/024b/gpole/index.php>

7 HYDROMECHANIKA

8.1 Hydrostatika

Základní charakteristika kapalin - kapaliny jsou jen velmi málo stlačitelné, za rovnovážného stavu v nich nemohou vznikat tečná napětí, jsou dokonale pružné.

Tlak v kapalině

$$p = \frac{F}{S}$$

tlaková síla

$$F = pS \quad (8.1)$$

Pascalův zákon (1652): Tlak p je ve všech místech uvnitř malé nádoby stejný a na myšlenou vloženou plochu vždy kolmý ($p = \text{konst.}$). Pokud se změní tlak v jenom místě kapaliny, která je uzavřená v nádobě, stejnou změnu zaznamenáme v libovolné části této kapaliny. Stejný tlak působí i na stěny nádoby. Lze tedy ukázat, že pokud je v kapalině v určitém místě tlak p , pak na libovolně orientovanou rovinnou plochu, kterou ponoříme do kapaliny, působí tlaková síla, jejíž velikost je určena vztahem $F = pS$.

Hydrostatický tlak – vzniká účinkem zemské tíže, je definován vztahem

$$p = h\rho g. \quad (8.2)$$

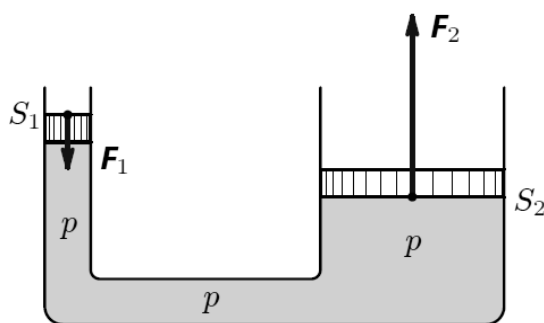
Odvození: $F = mg$, $m = \rho V$, $V = S h$, $F = S h \rho g$, $p = F/S$.

Jednotkou tlaku je $[p] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$.

Na základě Pascalova zákona pracují hydraulická a pneumatická zařízení. Tato zařízení využívají možnosti změny poměru působících tlakových sil.

Mějme nádobu, ve které je kapalina, uzavřenou dvěma písty o plošném obsahu S_1 a S_2 . Na píst o ploše S_1 působíme kolmo silou o velikosti F_1 a tím vyvoláme v kapalině tlak $p = \frac{F_1}{S_1}$.

Platí-li Pascalův zákon, stejný tlak je v celém objemu kapaliny, z čehož plyne, že na píst o ploše S_2 působí síla o velikosti $F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2$.



Obr. 43 Spojené nádoby

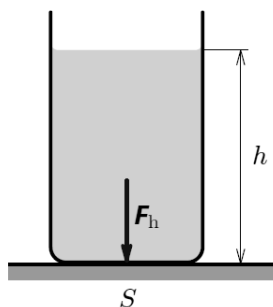
Je vidět, že je-li $S_1 < S_2$, je také $F_1 < F_2$.

Praktické využití – hydraulický lis, stavitelná křesla, hever.

U pneumatických zařízení není kapalina, ale stlačený vzduch, který přenáší tlak (pneumatické kladivo, otvírání dveří, brzdy).

Na kapaliny v tíhovém poli Země působí tíhová síla. Kapalina působí proto na stěny nádoby, dno nádoby popř. na tělesa, která do kapaliny ponoříme, hydrostatickou tlakovou silou $\vec{F}_h$.

Odvození vztahu pro výpočet velikosti hydrostatické tlakové síly:



Obr. 44 K odvození hydrostatické tlakové síly

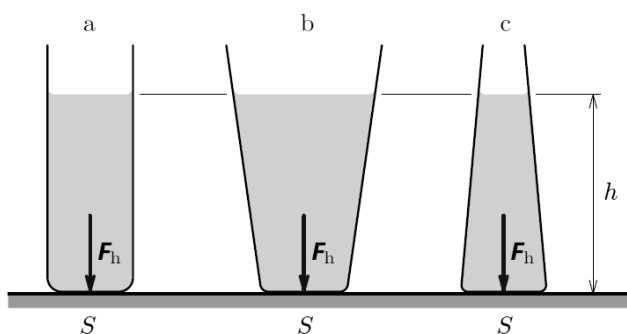
Mějme nádobu, ve které je kapalina o hustotě ρ , která sahá do výšky h v nádobě. Plošný obsah dna nádoby je S . Hmotnost tohoto vodního sloupce lze určit pomocí vztahu

$$m = \rho V = \rho Sh.$$

Hydrostatickou tlakovou sílu vypočteme jako tíhu vodního sloupce

$$F = mg = \rho Shg.$$

Hydrostatické paradoxon – velikost hydrostatické tlakové síly nezávisí na tvaru nádoby. Je-li kapalina v nádobách různého tvaru ve stejné výšce, působí na dno nádob, které mají plochu S stejně velká hydrostatická tlaková síla. Pouze v nádobě s rovnými stěnami je hydrostatická tlaková síla stejně velká jako tíhová síla kapaliny v nádobě.



Obr. 45 Hydrostatické paradoxon

Vztah pro výpočet hydrostatického tlaku určuje potenciální energii objemové jednotky kapaliny. Jedná se tak o výpočet potenciální energie v místě o hloubce h . Plochy o stejné potenciální energii v kapalině nazýváme ekvipotenciální plochy (hladiny). Volný povrch kapaliny je ekvipotenciální plochou $h = 0$. Jedná se o volnou hladinu.

Důsledkem hydrostatického tlaku je Archimédův zákon: Těleso je v tekutině nadlehčováno silou, která je rovná tíze tekutiny téhož objemu jako je objem tělesa obklopeného tekutinou (resp. částí tělesa, jehož povrch je ve styku s tekutinou).

Archimédův zákon

Velikost hydrostatické vztlakové síly působící na těleso ponořené do kapaliny je rovna velikosti tíhové síly působící na kapalinu o objemu rovném objemu tělesa.

Porovnáme-li hustotu tělesa a hustotu kapaliny, ve které je těleso ponořeno, mohou nastat tři případy:

$\rho > \rho_k$ těleso klesá v kapalině o hustotě ρ_k ke dnu,

$\rho = \rho_k$ těleso se v kapalině volně vznáší,

$\rho < \rho_k$ těleso v kapalině plave, ponořená část objemu $V' = V \frac{\rho}{\rho_k}$.

Spojené nádoby s kapalinami, které se nemísí:

Kapaliny v obou ramenech jsou v rovnováze, jestliže jsou stejné hydrostatické tlaky na společném rozhraní

$$h_1 \rho_1 g = h_2 \rho_2 g .$$

V případě spojených nádob platí, že poměr výšek hladin v jednotlivých ramenech je roven převrácenému poměru hustot obou kapalin:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (8.3)$$

Výšky sloupců kapalin jsou v obráceném poměru k jejich hustotám.

Barometrický tlak

Východiskem pro určení barometrického tlaku je Toricelliho pokus.

Toricelliho pokus:

Do nádoby se rtutí ponoříme na jednom konci zatavenou skleněnou trubicí dnem vzhůru. Rtuť v ní vystoupí do výšky 760 mm, nad sloupcem rtuti zůstává vakuum.

Jednotka tlaku v soustavě SI je Pa (pascal), $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

Další jednotky tlaku:

$$1 \text{ atm} = 9,806 \, 65 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ torr} = 133,322 \text{ Pa}$$

Normální atmosférický (barometrický) tlak je roven $1,013 \, 25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

Barometrická rovnice udává závislost tlaku na nadmořské výšce $p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h}$. Je dobrým přiblížením do výšky asi 5 000 m.

8.2 Hydrodynamika

Proudění ideální kapaliny

Uvažujeme proudění ustálené (stacionární), které má následující charakteristiky:

- rychlost částic v určitém místě je konstantní,
- částice kapaliny se pohybují po drahách tzv. proudnice,
- pomocí proudnic lze zobrazit vektorové pole rychlostí,
- část prostoru, která je omezena proudnicemi procházejícími obvodem určité plochy, se nazývá proudová trubice,
- proudnice se při ustáleném proudění neprotínají.

Rovnice spojitosti toku (kontinuity toku)

$$Sv = \text{konst.} \quad (8.4)$$

V uvedeném vztahu znamená S průřez trubice a v rychlost proudění kapaliny. Rovnice vyjadřuje objemový tok tekutiny. Číselně je roven velikosti objemu tekutiny, která za jednotku času proteče zvoleným průřezem S proudové trubice. Průřez S uvažujeme kolmý k rychlosti proudění.

Jednotka $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Vybereme-li si dvě místa v proudové trubici, lze psát

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Odtud plyne, že v úzké části potrubí proudí kapalina rychleji než v částech širokých.

Výtok kapaliny otvorem v nádobě:

$$E_k = \frac{1}{V} \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 = p,$$

tj. potenciální energie tlaková.

Výtoková rychlost:

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2[(b + h\rho g) - b]}{\rho}} = \sqrt{2gh}. \quad (8.5)$$

Rychlost nezávisí na hustotě kapaliny, je stejná, jakoby kapalina padala z výšky h volným pádem.

Bernoulliova rovnice

Zákon zachování energie pro ideální kapalinu

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + h\rho g = \text{konst.} \quad (8.6)$$

Lze říci, že objemová hustota energie proudící ideální kapaliny je stálá a ve všech místech proudové trubice stejná.

Výraz $\frac{1}{2}\rho v^2$ je kinetická energie jednotkového objemu kapaliny, $h\rho g$ je potenciální energie jednotkového objemu kapaliny vyvolaná tíhovým polem Země, p je potenciální energie tlaková jednotkového objemu kapaliny.

Mějme dvě místa trubice o průřezích S_1 a S_2 , kde rychlost tekutiny je v_1 a v_2 , odpovídající výšky jsou h_1 a h_2 a tlaky p_1 a p_2 . Píšeme

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g.$$

Nejdůležitější rovnice v mechanice tekutin, veličiny p je tlak, h je výška nad zemí, ρ je hustota kapaliny. Ve vodorovném potrubí je $h = \text{konst.}$ a člen pro hydrostatický tlak vypadne.

Vyzkoušejte si důsledky Bernoulliovy rovnice:

Foukejte mezi dva listy volně visícího papíru.

Foukejte vodorovně mezi dvě prázdné plechovky od nápoje, ležící asi 2 cm od sebe na vodorovné podložce.

Dejte do trychtýře ping-pongový míček a pokuste se míč z trychtýře vyfouknout.

Viskozita

Rychlost proudění tekutiny v celém průřezu trubice není stejná. Přímo při stěně je rovna nule a s rostoucí vzdáleností od stěny se zvětšuje – v proudící kapalině nebo plynu vznikají tečné (tangenciální) síly, tzv. síly vnitřního tření, vazkosti, viskozity.

Velikost vnitřního tření můžeme měřit silou F , které je zapotřebí, aby se deska plochy S pohybovala rovnoměrnou rychlostí v ve vzdálenosti z od klidné desky (stěny), je-li mezi nimi vyšetřovaná kapalina

$$F = \eta S \frac{v}{z}, \quad (8.7)$$

konstanta úměrnosti η se nazývá dynamický součinitel vnitřního tření (dynamická viskozita). Rovnici (8.7) nazýváme Newtonův vzorec.

Změnu rychlostí jednotlivých vrstev kapaliny vyjadřujeme rychlostním spádem, tzv. gradientem rychlosti, který udává změnu rychlosti v připadající na jednotku délky ve směru kolmém na směr rychlosti pohybu. Vyjadřuje se vztahem $F = \eta S \frac{dv}{dz}$, $\frac{F}{S} = \tau$, který určuje sílu připadající na jednotku plochy desky a udává tečné (tangenciální) napětí, které vzniká uvnitř tekutiny při jejím pohybu:

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz}$$

Tangenciální napětí je přímo úměrné rychlostnímu spádu v daném místě. Konstantou úměrnosti je dynamická viskozita, která závisí jen na druhu tekutiny a na teplotě. Jednotkou je

$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa} \cdot \text{s}$. Hodnota dynamické viskozity u kapalin s rostoucí teplotou klesá, u plynů stoupá. Vzduch má asi 100krát menší viskozitu než voda.

Podíl součinitele vnitřního tření a hustoty ρ se nazývá kinematický součinitel vnitřního tření (kinematická viskozita)

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (8.8)$$

Víme, že rychlost proudění skutečné kapaliny je největší v ose trubice a nejmenší u stěn. Zavedíme tzv. střední rychlost proudu, tj. rychlost, jakou by měla tekutina tekoucí v celém průřezu stejnou rychlostí tak, že by za jednotku času proteklo průřezem trubice stejné množství kapaliny, jaké proteče ve skutečnosti. Pokud střední rychlost nepřekročí určitou hranici a při proudění jsou všechny proudnice rovnoběžné s osou trubice, je proudění tzv. laminární. Mezní hodnota závisí na kinematické viskozitě a na poloměru trubice. Klesá-li poloměr, mezní hodnota roste. Tekutina teče jako duté válce, které se po sobě posouvají.

Pro objem Q tekutiny, která projde za laminárního proudění kapilárou, platí

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} r^4, \quad (8.9)$$

tj. Poiseuilleův (Hagenův) zákon. Množství tekutiny, jež projde kruhovým průřezem za jednotku času, je přímo úměrné tlakovému spádu, čtvrté mocnině poloměru trubice a je nepřímo úměrné dynamické viskozitě. Pro příliš velký tlakový spád – velká rychlost, proudění přestane být laminární a zákon neplatí.

Důsledkem vnitřního tření je odpor, který kapaliny kladou pohybu tuhých těles. Je-li těleso obtékáno kapalinou laminárně, platí pro odpor Stokesův zákon. Pro kouli má tvar

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (8.10)$$

V případě padající kuličky v tekutině dosáhne kulička určité mezní rychlosti, při níž se síla zrychlující (tíhová síla – vztlaková síla) rovná odporové síle brzdící pohyb. Je-li ρ hustota koule a ρ_k hustota kapaliny, pak platí

$$6\pi\eta r v_m = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_k)g, \quad \eta = \frac{2g}{9v_m}(\rho - \rho_k)r^2.$$

Na základě tohoto vztahu se realizuje měření viskozity metodou padající kuličky.

Viskozimetry

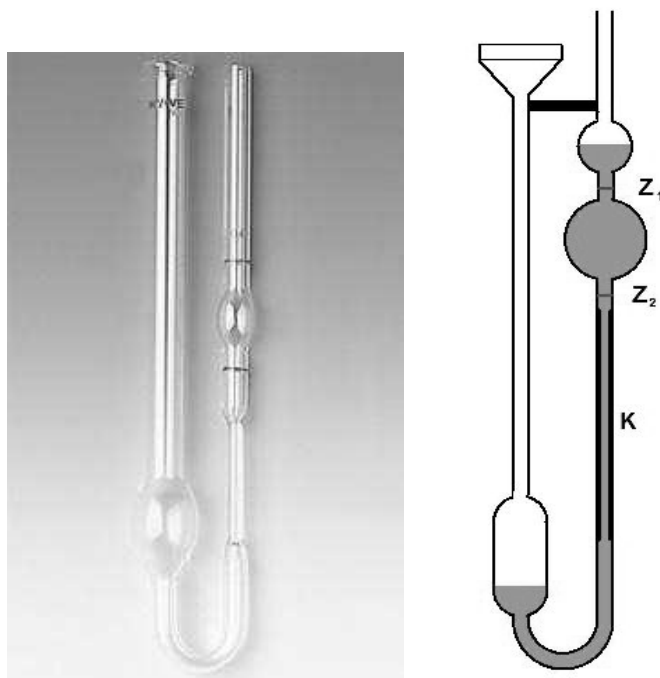
Absolutní měření – z Poiseuilleova zákona, měříme všechny ostatní veličiny.

Relativní měření – srovnání s kapalinou, jejíž dynamická viskozita je známá – Ostwaldův viskozimetr, Höpplerův viskozimetr.

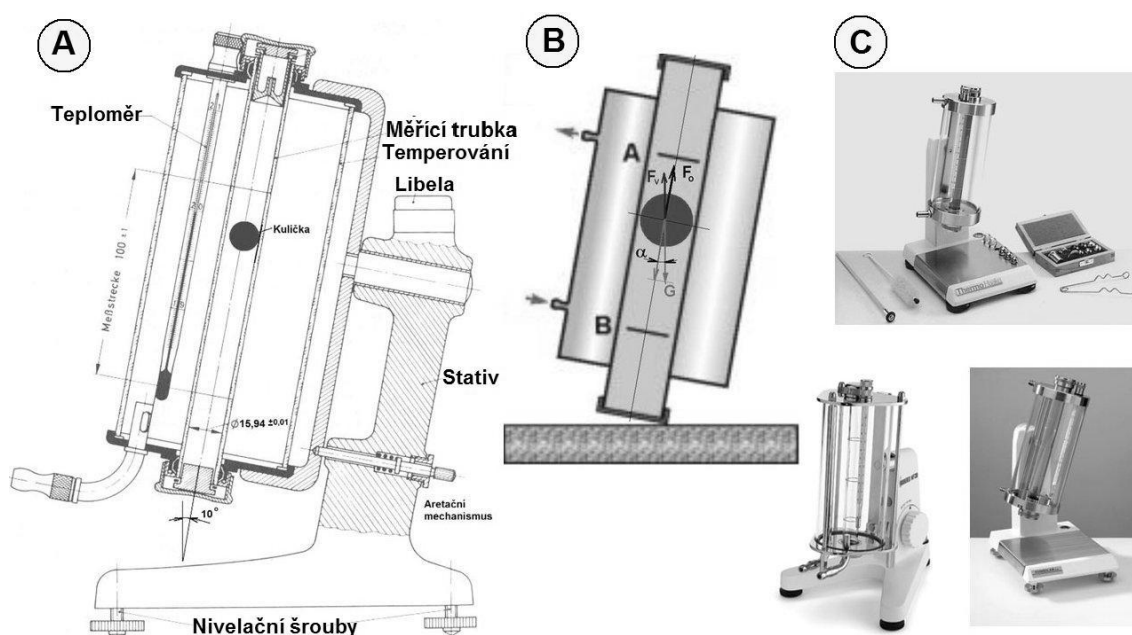
Jestliže se rychlost tekutiny v určitém bodě nepravidelně mění co do velikosti i směru, vznikají turbulence (víry). Anglický fyzik Reynolds konal pokusy se skleněnými trubicemi různého průřezu při různém tlakovém spádu a zjistil, že o druhu proudění rozhoduje bezrozměrná veličina – Reynoldsovo číslo R , jež charakterizuje každý tok

$$R = \frac{d\rho v}{\eta} = \frac{dv}{\nu}, \quad (8.11)$$

kde d je délka charakteristického rozměru tělesa (např. průměr trubice), ρ je hustota kapaliny, η dynamická viskozita, v střední rychlost kapaliny, ν kinematická viskozita.



Obr. 46 Ostwaldův viskozimetr



Obr. 47 Höpplerův viskozimetr A – schéma, B – síly působící na padající kuličku, C – fotografie prodávaných viskozimetrů

Podle pokusů laminární proudění v hladkých trubicích přechází v turbulentní tehdy, když Reynoldsovo číslo dosáhne kritické hodnoty R_k . Měření ukázala, že R_k pro vodu je asi 2 000 (2 400), tomu odpovídá kritická rychlost

$$v_k = \frac{R_k \eta}{d \rho} = \frac{R_k \nu}{d} \approx \frac{2\,000}{d} \approx \frac{1\,000}{r}.$$

Příklad:

Při 20 °C je pro vodu $\nu = 0,01 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, tedy v kapiláře o průměru $d = 0,02 \text{ cm}$ je rychlost $v_k = 2400 \cdot 0,01/0,02 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Tak velké rychlosti v kapiláře nedosáhneme. Je-li průměr trubice 2 cm, je $v_k = 12 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, při $d = 20 \text{ cm}$, je $v_k = 1,2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Z toho je patrné, že ve velkých průmyslových potrubích nastává pohyb turbulentní, neboť tekutina proudí rychleji, než je rychlost kritická.

Význam čísla R není omezen jen na proudění tekutin v trubicích, ale má základní význam pro proudění tekutiny v prostorech obecnějšího tvaru a při pohybu pevných těles v tekutinách.

Stejně zákonitosti platí i pro vzduch, pokud je rychlost značně menší než rychlost zvuku.

Při otáčivém pohybu tekutin následkem snadné posunutelnosti jejich částic a vnitřního tření nastávají jiné poměry než při otáčení pevného tělesa. Známým příkladem otáčivého pohybu tekutin jsou víry, které lze pozorovat např. nad výtokovým otvorem vany, kouřové kroužky ve vzduchu. Víry vznikají při proudění vlivem vnitřního tření, ve vrstvě, která odděluje dvě proudění různých rychlostí, víry vznikají za pevnými tělesy, která jsou v klidu nebo se pohybují (pilíře mostů), víry z láhve – mohou se dostat až do vzdálenosti několika metrů a zhasnout např. svíčku. Víry představují útvar značné stability, jsou vázány na hmotu, jsou vázány na mezní vrstvu.

Při pohybu tuhého tělesa v kapalině nebo plynu, působí na těleso síla, která se nazývá odpor prostředí. Tento odpor závisí na relativním pohybu tělesa a prostředí. Pohybující se těleso musí odstraňovat klidnou tekutinu, jež mu stojí v cestě. Je-li průřez tělesa ve směru kolmém na směr jeho pohybu S , rychlost tělesa v , hustota tekutiny ρ , pak podle zákona zachování energie musí se práce, kterou koná těleso přemáháním odporu prostředí, tj. síly F , za jistou dobu rovnat kinetické energii, kterou za tutéž dobu nabude odstraněné, původně klidná tekutina, jejíž objem odstraněný za daný čas je $S \cdot v$. Platí Newtonův vzorec pro odpor prostředí:

$$F \cdot v = \frac{1}{2} \rho v^2 S v \Rightarrow F = S \frac{1}{2} \rho v^2$$

Vzorec vyhovuje jen přibližně – při větších rychlostech závisí na geometrických vlastnostech pohybujícího se tělesa :

$$F = C S \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Podmínky letu – tlaková vlna při rychlosti blízké rychlosti zvuku, je-li překonána nadzvuková rychlost, tlak klesá, pro odpor prostředí platí jiné vztahy. Poměr rychlosti letadla k rychlosti zvuku za stejných podmínek se nazývá Machovo číslo. Mach 1 – letadlo letí rychlostí zvuku ($1\,200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$), mach 2 = $2\,400 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ při zemi (rychlost ve výšce je menší, s výškou klesá teplota a tím i rychlost zvuku).

Ernst Mach a Morava

Fyzik a filozof Ernst Mach se narodil 18. února 1838 v Chrlicích u Brna. Prarodiče z matčiny strany sloužili v arcibiskupském zámku, kde se Ernst narodil. Mach byl nadané dítě, ale měl problémy s klasickými jazyky - Ernst Mach začal v devíti letech studovat gymnázium, ale nedokončil je. Úspěšně ale ukončil studia na piaristickém gymnáziu v Kroměříži. Od roku 1855 studoval Mach na univerzitě ve Vídni (matematika, fyzika, filozofie). V roce 1860 získal doktorát a po habilitaci zde působil jako soukromý docent.



Ernst Mach, 1900

Podpis E. Macha

Ernst Mach a Praha

V letech 1864–1867 přednáší Mach v Grazu matematiku, fyziku, fyziologii a psychologii. V letech 1867–1895 zastává místo profesora experimentální fyziky na univerzitě v Praze (od r. 1879 rektor univerzity). Mach se setkal s Purkyněm a Palackým. V Praze Mach mj. zkoumal zrakové a sluchové vnímání. Zkoumal šokové vzduchové vlny způsobené rychle letícími projektily. Působení Macha v Praze bylo ovlivněno narůstajícím českým nacionalismem a antisemitismem (Mach sám nebyl Žid, ale měl mnoho židovských přátel). Od roku 1895 působí Ernst Mach ve Vídni jako profesor induktivní filozofie.

Sjednocení vědních oborů

Ernst Mach se vedle fyziky a filozofie věnoval také chemii, fyziologii a psychologii. Mach byl také zkušeným experimentátorem. Snažil se o sjednocení různých vědních oborů. Mach se snažil o vybudování oboru zvaného psychofyzika. Psychofyzika měla vysvětlovat vztah mezi fyzikálními podněty a smyslovými počitky. V roce 1883 Mach vydává knihu *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (Mechanika ve svém vývoji), ve které kritizuje newtonovské pojetí fyziky. Mach ale kritizuje také teoretickou fyziku, protože zastával názor, že je neplodná a jde mimo hranice vnímání.

Mach odmítal také atomistickou teorii a považoval ji za výplod teoretické fyziky. Podle Macha byl atom pojmem pro něco nedefinovatelného pomocí počitků, něco co komplikuje vysvětlování mnoha jevů.

Nemocný Mach

Od roku 1898 musí Mach čelit vážnému zhoršení svého zdravotního stavu, které vede až k paralýze poloviny těla. Přesto pokračuje v publikování a v navrhování experimentů. Začátek 20. století narůstá kritika Machovy práce a to i z řad jeho dřívějších zastánců, mezi které patřili např. Albert Einstein a Max Planck.

Ernst Mach zemřel 19. února 1916 v německém Vaterstettenu.

Shrnutí

Rovnice kontinuity toku je

$$Sv = \text{konst.},$$

Bernoulliovu rovnici lze zapsat ve tvaru

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + h \rho g = \text{konst.}$$

Rychlost výtoku kapaliny otvorem je stejná, jako rychlost volného pádu tělesa. Mezi přechodem laminárního proudění v turbulentní je Reynoldsovo číslo. Pro viskózní kapaliny definujeme koeficient dynamické viskozity a koeficient kinematické viskozity. Viskozitu určujeme pomocí viskozimetrů (kapilární, výtokové, Englerův, Höpplerův).

Kontrolní otázky

Vysvětlíte rovnici kontinuity toku.

Slovně vyjádřete Bernoulliho rovnici.

Co je to proudová trubice?

Jak definujeme hustotu toku a jaký je praktický význam této veličiny?

Literatura

Halliday, D. – Resnick, R. –Walker, J. : Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001. Tekutiny, str. 385-401.

Doporučená literatura

Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Prometheus 2006.

Halliday, D. – Resnick, R. –Walker, J.: Fyzika I. a II. VUTIUM, Prometheus 2001.

Holubová, R.: Fyzika – přednášky pro bakaláře. <http://www.upol.cz>

Holubová, R.: Molekulová fyzika a termodynamika. <http://www.upol.cz>

Bartuška, K.: Sbírka řešených příkladů z fyziky I. a II. Prometheus 1998.

Kubínek, R. – Kolářová, H.: Rychlokurs fyziky. Rubico 1999.

Renata Holubová

MECHANIKA

Výkonný redaktor prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.
Odpovědná redaktorka Mgr. Lucie Loutocká
Technická úprava textu doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc.
Návrh obálky Jiří Jurečka

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci
Křížkovského 8, 771 47 Olomouc
<http://www.upol.cz/vup>
e-mail: vup@upol.cz

Olomouc 2012

1. vydání

Publikace neprošla ve vydavatelství redakční a jazykovou úpravou.

Neprodejné

ISBN 978-80-244-3298-4